Generische Zerfällung Quadratischer Formen

Diplomarbeit vorgelegt von

Klaas-Tido Rühl

aus

Essen

angefertigt im Mathematischen Institut

der Georg-August-Universität zu Göttingen

2004

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis 3

0 Einleitung 5

1 Grundlagen 9
1.1 Quadratische Formen über lokalen Ringen . . . 9
1.1.1 Quadratische Räume und quadratische Formen . . . 10
1.1.2 Diagonalisierung quadratischer Formen . . . 13
1.1.3 Die Witt-Zerlegung . . . 15
1.1.4 Der Wittring eines lokalen Ringes . . . 19
1.2 Quadratische Formen über Körpern . . . 23
1.2.1 Grundlegende Resultate . . . 23
1.2.2 Pfisterformen . . . 26
1.2.3 Der Wittring eines Körpers und sein Fundamentalideal . . . 28
1.3 Die Clifford-Invariante . . . 31
1.3.1 Die Brauergruppe . . . 31
1.3.2 Quaternionenalgebren . . . 34
1.3.3 Die Clifford-Invariante . . . 36
1.4 Diskret bewertete Körper . . . 41
1.4.1 Diskrete Bewertungen . . . 41
1.4.2 Diskret bewertete, vollständige Körper . . . 42

2 Generische Zerfällung 47
2.1 Spezialisierung und Funktionenkörper . . . 47
2.1.1 Stellen . . . 47
2.1.2 Der Funktionenkörper einer quadratischen Form . . . 54
2.1.3 Eigenschaften des Funktionenkörpers . . . 55
2.1.4 Spezialisierung . . . 58
2.2 Generische Zerfällungstürme . . . 62
2.2.1 Generische Nullstellenkörper und Pfisternachbarn . . . 62
2.2.2 Generische Zerfällungstürme . . . 67
2.2.3 Die Leitform . . . 71
2.2.4 Der Grad einer quadratischen Form . . . 73

3 Wittkerne und exzellente Formen **79**
3.1 Wittkerne . . . 79
3.1.1 Hilfsresultate über Pfisterformen . . . 79
3.1.2 Pfister-Ideale . . . 81
3.1.3 Wittkerne . . . 85
3.2 Exzellente Formen . . . 90
3.2.1 Das Anisotropiekriterium . . . 90
3.2.2 Charakterisierung von Pfisternachbarn . . . 94
3.2.3 Exzellente Formen . . . 96
3.2.4 Anatomie . . . 99
3.2.5 Exzellente Formen der Dimension ≤ 12 . . . 105

4 Anwendungen **111**
4.1 Isotropieverhalten von Formen der Dimension ≤ 6 . . . 111
4.1.1 Formen der Dimension ≤ 4 . . . 111
4.1.2 Albert-Formen . . . 114
4.1.3 Formen der Dimension 5 . . . 118
4.1.4 Eine weitere Klasse 6-dimensionaler Formen . . . 124

A Tabellen **133**

Literaturverzeichnis **141**

Symbolverzeichnis **145**

Index **148**

Kapitel 0

Einleitung

Was passiert mit einer quadratischen Form ψ über einem Körper K, wenn sie über einer Körpererweiterung L von K betrachtet wird? Dies ist eine der wichtigsten Fragen in der algebraischen Theorie quadratischer Formen. Genauer kann man fragen, ob und wie sich die Wittindizes $i(\psi_L)$ und $i(\psi)$ unterscheiden. Die Antwort hierauf fällt leicht, wenn L rein transzendent oder endlich von ungeradem Grad über K ist. In diesen Fällen verändert sich der Wittindex nicht. Die Untersuchung anderer Fälle stellt jedoch im Allgemeinen eine große Herausforderung dar. Hier setzt die Theorie der *generischen Zerfällung* quadratischer Formen an.

Der Begriff des *Zerfällungskörpers* fand zuerst in der Theorie der endlichdimensionalen, zentralen, einfachen K-Algebren Verwendung. Mit Hilfe des Struktursatzes von Wedderburn (1907) wurde es möglich für solche Algebren Zerfällungskörper zu definieren. Witt konstruierte 1935 erstmals einen Zerfällungskörper L einer Quaternionenalgebra A über K, der in seiner Eigenschaft als Zerfällungskörper *generisch* war. Dies bedeutet, dass zu jedem weiteren Zerfällungskörper M von A eine K-Stelle $L \to M^\infty$ existiert. Anders formuliert ist M eine *K-Spezialisierung* von L. Manfred Knebusch legte daraufhin 1973 in [Kne73] die Grundlagen für die Theorie der generischen Zerfällung von quadratischen Formen, indem er die Spezialisierung von quadratischen Formen einführte. Bald darauf verfasste er die zwei Artikel [Kne76] und [Kne77], in denen er die Theorie der generischen Zerfällung quadratischer Formen formulierte. Neu an dieser Theorie war, dass sie sich nur nebenbei mit Zerfällungskörpern quadratischer Formen beschäftigte. Wichtiger waren die *generischen Nullstellenkörper* einer quadratischen Form ψ über K. Bei diesen handelt es sich um Erweiterungen L von K, die generisch mit der Eigenschaft sind, dass ψ_L isotrop ist. Das heißt, jede Erweiterung M von K für die ψ_M isotrop ist, ist eine K-Spezialisierung von L. Der *Funktionenkörper* $K(\psi)$ von ψ ist ein gutes Beispiel für einen generischen Nullstellenkörper von ψ. Knebusch konstruierte zu einer gegebenen quadratischen Form ψ über K *generische Zerfällungstürme*. Dies sind Türme aus Körpererweiterungen von K, über denen ψ Stück für Stück zerfällt. Deshalb spricht man häufig auch von der Theorie der *partiellen generischen Zerfällung* quadratischer Formen.

Die Resultate von Knebusch blieben zunächst verhältnismäßig unbeachtet. Erst in den 90er Jahren wurde eine ungeheure Menge an Artikeln veröffentlicht, die sich mit der Theorie der generischen Zerfällung quadratischer Formen beschäftigten. Allerdings existiert bisher kein Lehrbuch, das eine umfassende Einführung und Übersicht zu diesem Thema liefert. Die

Hauptaufgabe dieser Arbeit ist es nun, diese Lücke zu schließen. Ferner soll untersucht werden, inwieweit sich ältere Beweise zu Resultaten über quadratische Formen und deren generischer Zerfällung mit Hilfe aktueller Ergebnisse, wie zum Beispiel dem *Anisotropiekriterium* von Detlev Hoffmann, vereinfachen lassen.

Sei φ eine anisotrope quadratische Form über K. Aufgabe der Theorie der generischen Zerfällung quadratischer Formen ist es nun, Antworten auf die folgenden Fragen zu finden:

(1) Welche anisotropen quadratischen Formen über K werden isotrop über $K(\varphi)$?

(2) Für welche quadratischen Formen ψ über K wird $\varphi_{K(\psi)}$ isotrop?

(3) Welchen Wittindex hat φ über $K(\varphi)$?

Im Laufe dieser Arbeit werden wir jede dieser Fragen wenigstens teilweise beantworten können. Für das Verständnis werden grundlegende Kenntnisse in Algebra, kommutativer Algebra und algebraischer Geometrie vorausgesetzt.

Im ersten Kapitel führen wir zunächst die notwendigen Grundlagen aus der algebraischen Theorie quadratischer Formen ein. Für die Einführung quadratischer Formen über einem kommutativen, lokalen Ring wählen wir einen Ansatz, der es uns ermöglicht, mit regulären quadratischen Formen über solchen Ringen genauso arbeiten zu können, wie mit regulären quadratischen Formen über Körpern. Daraufhin führen wir die notwendigen Resultate für das Arbeiten mit quadratischen Formen über Körpern ein. Der Clifford-Invariante einer quadratischen Form widmen wir einen ganzen Abschnitt, da diese und ihre Rechenregeln in vielen Beweisen dieser Arbeit eine wesentliche Rolle spielen. Das Kapitel abschließend beschäftigen wir uns kurz mit der Theorie quadratischer Formen über diskret bewerteten Körpern.

Das zweite Kapitel ist den Grundlagen der Theorie der generischen Zerfällung gewidmet. Wir führen zunächst Stellen ein und beweisen mit elementaren Methoden alle Fortsetzungsresultate für Stellen, die in der Theorie der generischen Zerfällung benötigt werden. Es sei erwähnt, dass es bisher keine Veröffentlichung gab, in der diese Resultate an einem Ort zusammengestellt und bewiesen wurden. Nun können wir Funktionenkörper und die Spezialisierung quadratischer Formen definieren und untersuchen. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich daraufhin mit der generischen Zerfällung von quadratischen Formen. Wir definieren generische Nullstellenkörper und Pfisternachbarn, eine Klasse von quadratischen Formen, die in der Theorie der generischen Zerfällung besonders wichtig ist. Ist φ ein Pfisternachbar, so fällt es uns leicht, die Frage (2) vollständig zu beantworten. Der Rest des Kapitels befasst sich mit generischen Zerfällungstürmen und deren genaueren Untersuchung.

Das dritte Kapitel beginnt mit einem Abschnitt, der sich mit der Beantwortung einer Variante von Frage (1) beschäftigt. Es wird untersucht, welche quadratischen Formen über dem Funktionenkörper einer Form φ über K hyperbolisch werden. Anders formuliert suchen wir alle geradedimensionale Formen über K, die über $K(\varphi)$ zerfallen. Leider ist es uns nur für den Fall, dass φ ein Pfisternachbar ist, möglich, dieses Problem vollständig zu lösen. Der Abschnitt beginnt mit einer Reihe von Resultaten über Pfisterformen, die vormals von Richard Elman und Tsit-Yuen Lam in [EL72] mit elementaren Methoden bewiesen wurden. Mit den uns zur Verfügung stehenden Methoden der generischen Zerfällung können wir diese Resultate erheblich kürzer und eleganter beweisen. Anschließend führen wir im zweiten Abschnitt die in der Theorie der generischen Zerfällung wohl wichtigste Klasse quadratischer Formen ein, die exzellenten Formen. Für deren Charakterisierung wählen wir einen anderen Ansatz als

Knebusch, der diese Formen in [Kne77] erstmals einführte. Wir erarbeiten uns zunächst eine Charakterisierung von Pfisternachbarn und nutzen diese dann für die Charakterisierung von exzellenten Formen. Dies wird mit Hilfe des Anisotropiekriteriums, das Knebusch noch nicht zur Verfügung stand, möglich. Es stellt sich heraus, dass es für Pfisternachbarn möglich ist, auch Frage (3) vollständig zu beantworten. Für eine exzellente Form φ ist es sogar möglich, den Wittindex über jedem Körper eines generischen Zerfällungsturm von φ genau zu bestimmen. Insbesondere hängen diese Wittindizes nur von der Dimension von φ ab. Zusätzlich führen wir Erweiterungen quadratischer Formen ein. Diese wurden von Jürgen Hurrelbrink und Ulf Rehmann in [HR93] eingeführt und stellen eine Verallgemeinerung von exzellenten Formen dar. Wir werden eine Reihe der Resultate, die Knebusch in [Kne77] ausschließlich für exzellente Formen bewiesen hat, auf Erweiterungen quadratischer Formen übertragen.

Das vierte Kapitel ist vollständig der Beantwortung von Frage (2) gewidmet. Wir betrachten anisotrope, niedrigdimensionale Formen φ über K und suchen zu diesen alle Formen ψ, für die $\varphi_{K(\psi)}$ isotrop wird. Für den Fall $\dim(\varphi) \leq 5$ wird es uns möglich sein, Frage (2) vollständig zu beantworten. Ist $\dim(\varphi) = 6$, so gelingt uns wenigstens eine teilweise Beantwortung dieser Frage.

Abschließend möchte ich mich bei Prof. Ina Kersten für die umfangreiche Unterstützung und die vielen Anregungen danken, die sie mir während des Entstehungsprozesses dieser Arbeit hat zukommen lassen. Ferner würde ich gerne Prof. Detlev Hoffmann von der University of Nottingham dafür meinen Dank aussprechen, dass er immer offen für Fragen bzgl. dieser Arbeit war und mir mit vielen Problemen geholfen hat. Zu guter Letzt danke ich meinen Eltern und meinem Bruder für ihre bedingungslose Unterstützung während der ganzen Zeit meines Studiums und besonders in schwierigen Zeiten.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Quadratische Formen über lokalen Ringen

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Wittring $W(R)$ eines kommutativen, lokalen Ringes R so einzuführen, dass wir im Wesentlichen genauso damit umgehen können wie mit dem Wittring eines Körpers. Mit letzterem werden wir uns noch im folgenden Abschnitt 1.2 genauer beschäftigen. Im ersten Unterabschnitt führen wir zunächst quadratische Räume und quadratische Formen ein. Während die Theorie der quadratischen Räume der Geometrie zuzuordnen ist, gehört die Theorie der quadratischen Formen zur Algebra. Ein Bindeglied zwischen diesen beiden Theorien bilden symmetrische Matrizen über R. Wir führen die grundlegendsten Begriffe beider Theorien ein und verdeutlichen die Zusammenhänge zwischen ihnen.

Im zweiten Unterabschnitt zeigen wir, dass sich jede reguläre quadratische Form diagonalisieren lässt. Dies bedeutet, dass sich die symmetrische Matrix über R, die einer regulären quadratischen Form zugeordnet wird, mit Hilfe von Kongruenzoperationen auf Diagonalgestalt bringen lässt. Hierdurch wird eine anschauliche Notation von quadratischen Formen ermöglicht, welche den Umgang mit jenen wesentlich vereinfacht.

Den dritten Unterabschnitt widmen wir der Witt-Zerlegung. Diese beschreibt die Darstellung einer jeden regulären quadratischen Form als orthogonale Summe zweier Teilformen, von denen die eine anisotrop ist, also keine nichttrivialen Nullstellen besitzt, und die andere orthogonale Summe hyperbolischer Ebenen ist. Dabei kann man sich eine hyperbolische Ebene als den Prototyp einer quadratischen Form vorstellen, die eine nichttriviale Nullstelle besitzt. Die Witt-Zerlegung erinnert an den Struktursatzes von Wedderburn (siehe Satz 1.3.3), der besagt, dass jede zentrale, einfache Algebra über einem Körper als Tensorprodukt eines Schiefkörpers mit einem Matrizenring darstellbar ist. In unserem Fall tritt an die Stelle des Schiefkörpers die anisotrope Teilform, und der Matrizenring wird von der Summe hyperbolischer Ebenen ersetzt. So wie der Struktursatz von Wedderburn zur Definition der Brauergruppe führt, ermöglicht die Witt-Zerlegung die Definition des Wittrings im vierten Unterabschnitt. Tatsächlich bewegte genau diese Parallele Witt zur Definition dieses Rings über einem Körper.

1.1.1 Quadratische Räume und quadratische Formen

Wir legen fest, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die 0 nicht enthalten. Sollte die Zahl 0 hinzugezogen werden, so verwenden wir die Notation $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ferner bezeichnen wir für einen Ring R mit $M_n(R)$ den Ring der $(n \times n)$-Matrizen über R, $n \in \mathbb{N}$. Wir erlauben, um in Zukunft Fallunterscheidungen zu vermeiden, die Notation $A \in M_0(R) = \varnothing$ und verstehen A als die leere Matrix.

Zunächst beweisen wir eine Charakterisierung von kommutativen, lokalen Ringen, die wir in dieser Arbeit häufig benötigen werden.

1.1.1 Lemma. *Ein kommutativer Ring R mit Ideal $\mathfrak{p} \neq R$ ist genau dann lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$, wenn alle $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ invertierbar sind.*

Beweis. Sei R lokal. Wir nehmen an, es existiert ein $x \in R \setminus \mathfrak{p}$, das in R nicht invertierbar ist. Es folgt $(x) \subsetneqq R$. Das Hauptideal (x) ist nun in einem maximalen Ideal $\mathfrak{q}$ enthalten mit $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$. Dies kann nicht sein, da R lokal ist.

Umgekehrt sei jedes Element $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ invertierbar. Da alle echten Ideale nur aus Nichteinheiten bestehen, liegt jedes Ideal $I \neq R$ in $\mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal in R. □

Im Folgenden sei R stets ein kommutativer, lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $2 \in R^*$. Viele der nachfolgende Resultate sind in einem wesentlich allgemeineren Kontext gültig (siehe zum Beispiel [MH73] oder [Kne02]). In dieser Arbeit entwickeln wir die Theorie der generischen Zerfällung allerdings ausschließlich für quadratische Formen über Körpern. Wir benötigen quadratische Formen über Ringen im Wesentlichen nur, um in Unterabschnitt 2.1.4, der die Spezialisierung quadratischer Formen behandelt, das Fundament für die Theorie der generischen Zerfällung zu legen. Dann allerdings muss uns der Wittring eines kommutativen, lokalen Ringes zur Verfügung stehen. In diesem Abschnitt geben wir eine Einführung in die Theorie der quadratischen Formen über kommutativen, lokalen Ringen, so dass dies im nächsten Abschnitt 1.2 für den Spezialfall von Körpern nicht mehr notwendig sein wird. Setzen wir dann das Ideal $(0) = \{0\}$ an die Stelle von $\mathfrak{m}$, so lassen sich die Resultate in diesem Abschnitt ohne Änderung auf quadratische Formen über Körpern übertragen.

1.1.2 Definition. *Sei R ein kommutativer, lokaler Ring mit $2 \in R^*$ und $n \in \mathbb{N}_0$.*

(1) Sei M ein freier[1] R-Modul vom Rang n. Eine Abbildung $q : M \to R$ heißt quadratisch*, falls*

$$q(\lambda v) \ = \ \lambda^2 q(v) \qquad \forall\, v \in M \quad \text{und} \quad \forall\, \lambda \in R$$

gilt und

$$b_q : M \times M \longrightarrow R, \quad (v, w) \longmapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \tag{1.1}$$

eine symmetrische R-Bilinearform ist. Das Tupel (M, q) wird quadratischer Raum *über R genannt, und b_q heißt* assoziierte Bilinearform *von q.*

[1] In der Definition von quadratischen Räumen über einem beliebigen kommutativen Ring R wird nur gefordert, dass M projektiv ist und endlichen Rang hat (vergleiche zum Beispiel [MH73]). In unserem speziellen Fall ist zu beachten, dass jeder projektive R-Modul von endlichem Rang frei ist, falls R lokal ist (siehe [Bou72, Corollary 2, Chap. II.3.2]).

(2) *Eine* n-dimensionale quadratische Form φ *über* R *ist ein homogenes Polynom vom Grad* 2 *in* n *Unbestimmten* $X_1, \ldots, X_n$ *mit Koeffizienten in* R. *Das heißt,* φ *hat die Form*

$$\varphi \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j \ \in \ R[X_1, \ldots, X_n] \qquad \textit{mit } a_{ij} \in R \quad \textit{für} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

und wir schreiben $\dim(\varphi) := n$ *(für* $n = 0$ *ist* $\varphi = 0$*).*

1.1.3 Bemerkung. Bei der Definition von quadratischen Formen ist zu beachten, dass eine quadratische Form nicht einfach ein Polynom ist. Die Dimension einer quadratischen Form ist ein fester Bestandteil ihrer Definition. Ist R ein kommutativer, lokaler Ring, so ist zum Beispiel $\varphi = X_1^2 + 0X_2^2 + 0X_3^2 = X_1^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$ eine quadratische Form der Dimension 3 über R. $\triangle$

Es sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass in Definition 1.1.2 explizit gefordert wird, dass eine quadratische Form immer endlicher Dimension ist. Grundsätzlich stellt es kein Problem dar, auch quadratische Formen unendlicher Dimension zu definieren. In der Physik werden sehr häufig solche Formen über Körpern (meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) betrachtet. Zur algebraischen Theorie solcher Formen existieren allerdings nur wenige Veröffentlichungen (siehe zum Beispiel [Gro79] oder [Wit98, S. 27-33]).

Die Notwendigkeit, dass $2 \in R^*$ liegen muss, wird sofort durch Forderung (1.1) deutlich, da in diesem Fall jedem quadratischen Raum über R eine eindeutig bestimmte symmetrische R-Bilinearform zugeordnet werden kann. Umgekehrt existiert zu jeder symmetrischen R-Bilinearform $b : M \times M \to R$ ein eindeutig durch b festgelegter quadratischer Raum (M, q) mit $q : M \to R$, $v \mapsto b(v, v)$. Hieraus folgt, dass über Ringen, in denen die 2 invertierbar ist, und insbesondere über Körpern der Charakteristik $\neq 2$ die Theorie symmetrischer R-Bilinearformen und die Theorie quadratischer Räume über R zusammenfallen. Liegt $2 \notin R^*$, so gilt dies nicht, was im Wesentlichen darauf zurückzuführen ist, dass dann Forderung (1.1) keinen Sinn macht. Eine genauere Behandlung dieser Problematik und eine Einführung in die Theorie quadratischer Formen über Körpern der Charakteristik 2 findet sich zum Beispiel in [Pfi95, Chap. 1.4, Chap. 2.4].

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Jede quadratische Form $\psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j$ über R lässt sich eindeutig schreiben als

$$\psi \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) X_i X_j.$$

So können wir ψ die eindeutig bestimmte, symmetrische Matrix

$$A_\psi \ := \ (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \ \in \ M_n(R) \qquad \text{mit} \qquad b_{ij} \ = \ \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

zuordnen. Wir nennen A_ψ die *assoziierte Matrix* von ψ. Umgekehrt lässt sich jeder symmetrischen Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(R)$ eindeutig die quadratische Form

$$\varphi_B \ := \ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} X_i X_j$$

zuordnen.

Ferner definiert jede n-dimensionale quadratische Form φ über R eine quadratische Abbildung, die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit φ bezeichnen wollen:

$$\varphi : R^n \longrightarrow R, \quad x \longmapsto x^t A_\varphi x.$$

Somit ist (R^n, φ) ein quadratischer Raum. Die assoziierte Bilinearform b_φ von φ ist gegeben durch

$$b_\varphi : R^n \times R^n \longrightarrow R, \quad (x, y) \longmapsto x^t A_\varphi y.$$

1.1.4 Definition. *(1) Zwei quadratische Räume (M, q) und (N, r) über R heißen* isometrisch*, falls ein R-Modulisomorphismus $T : M \to N$ existiert, so dass $q(v) = r(Tv)$ für alle $v \in M$ gilt. Wir schreiben dann $(M, q) \cong (N, r)$ und bezeichnen T als* Isometrie.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zwei n-dimensionale quadratische Formen φ und ψ über R heißen isometrisch*, falls die assoziierten Matrizen von φ und ψ kongruent sind, falls also eine Matrix $T \in GL_n(R)$ mit $A_\varphi \cong T^t A_\psi T$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $\varphi \cong \psi$, und die Matrix T nennen wir* Isometrie.

1.1.5 Bemerkung. Sofort wird deutlich, dass zwei n-dimensionale quadratische Formen φ und ψ über R genau dann isometrisch sind, wenn (R^n, φ) und (R^n, ψ) isometrisch sind. Seien nun (M, q) und (N, r) isometrische quadratische Räume über R. Da vorausgesetzt wird, dass M und N endlichen Rang haben, und da R kommutativ ist, folgt $\operatorname{rang}_R(M) = \operatorname{rang}_R(N)$. △

Sei (M, q) ein beliebiger quadratischer Raum über R vom Rang $n \in \mathbb{N}_0$. Eine *geordnete Basis* $\mathcal{B}$ von M ist ein n-Tupel $(b_1, \ldots, b_n)$ so, dass $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von M bilden. Wir können nun q die symmetrische Matrix

$$A := (b_q(b_i, b_j))_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(R)$$

zuordnen, die wir *assoziierte Matrix* von (M, q) bzgl. $\mathcal{B}$ nennen. Sei $\kappa_\mathcal{B} : M \to R^n$ die Koordinatenabbildung, die für $i = 1, \ldots, n$ das Element b_i auf den i-ten Einheitsvektor $e_i \in R^n$ abbildet. Offensichtlich handelt es sich hierbei um einen R-Modulisomorphismus, und es gilt

$$b_q(b_i, b_j) = e_i^t A\, e_j = \kappa_\mathcal{B}(b_i)^t A\, \kappa_\mathcal{B}(b_j) = b_{\varphi_A}(\kappa_\mathcal{B}(b_i), \kappa_\mathcal{B}(b_j)).$$

Hieraus folgt $(M, q) \cong (R^n, \varphi_A)$ mit der Isometrie $\kappa_\mathcal{B}$.

An dieser Stelle legen wir fest, dass zwei Elemente $v, w \in M$ *orthogonal* zueinander stehen, falls $b_q(v, w) = 0$ gilt. Eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von M heißt *Orthogonalbasis*, falls $b_q(b_i, b_j) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt.

1.1.6 Definition. *(1) Sei (M, q) ein quadratischer Raum über R, und seien $U, V \subset M$ freie Untermoduln.*

(a) Gilt $M = U \oplus V$ und $b_q(u, v) = 0$ für alle $u \in U$ und alle $v \in V$, so schreiben wir $M = U \perp V$ und nennen diese Summe orthogonal*. Der Untermodul V heißt* orthogonales Komplement *von U, und wir sagen, $U \perp V$ sei eine* orthogonale Zerlegung *von M.*

(b) Wir definieren

$$U^\perp := \{v \in M \mid b_q(u, v) = 0 \ \forall\, u \in U\} \subset M$$

als den Untermodul aller zu U orthogonaler Elemente von M.

(2) Seien ψ und χ quadratische Formen über R.

(a) Die orthogonale Summe *von ψ und χ ist definiert durch*

$$\psi \perp \chi \;:=\; \varphi_A \qquad \mathit{mit} \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} A_\psi & 0 \\ 0 & A_\chi \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist χ Teilform *von ψ, falls eine quadratische Form ζ über R mit $\psi \cong \chi \perp \zeta$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $\chi \subset \psi$. Weiterhin bezeichnen wir $\chi \perp \zeta$ auch als* orthogonale Zerlegung *von φ.*

Sei ψ eine n-dimensionale quadratische Form über R. Zu dem quadratischen Raum (R^n, ψ) existiere eine Zerlegung $R^n = U \perp V$ mit $\operatorname{rang}_R(U) = k$. Dann sind $(U, \psi|_U)$ und $(V, \psi|_V)$ quadratische Räume über R. Seien $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_k)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_{n-k})$ jeweils geordnete Basen von U und V, und seien B und C jeweils die assoziierten Matrizen von $(U, \psi|_U)$ bzw. $(V, \psi|_V)$ bzgl. $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$. Dann ist $D = \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ die assoziierte Matrix von (R^n, ψ) bzgl. der geordneten Basis $(b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_{n-k})$ des R^n. Wir hatten gesehen, dass $(R^n, \psi) \cong (R^n, \varphi_D)$ gilt. Es folgt $\psi \cong \varphi_D = \varphi_B \perp \varphi_C$. Allgemeiner formuliert existiert zu jeder orthogonalen Zerlegung des R^n eine entsprechende orthogonale Zerlegung von ψ.

1.1.7 Bemerkung. Wir haben quadratische Räume und quadratische Formen sowie die jeweiligen Definitionen von Isometrie und orthogonaler Zerlegung parallel eingeführt. So wurde deutlich, dass man zwischen der Theorie der quadratischen Räume und der Theorie quadratischer Formen über einem kommutativen, lokalen Ring wechseln kann. Speziell Resultate, die Aussagen über Isometrie oder orthogonale Zerlegungen machen, lassen sich von quadratischen Räumen auf quadratische Formen und umgekehrt übertragen. Dies ermöglicht es uns im Folgenden Aussagen über quadratische Formen mit Hilfe von quadratischen Räumen zu beweisen. △

1.1.2 Diagonalisierung quadratischer Formen

Sei ψ eine quadratische Form der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ über R. Besitzt der quadratische Raum (R^n, ψ) von ψ eine geordnete Orthogonalbasis $\mathcal{B}$, so hat die assoziierte Matrix B von (R^n, ψ) bzgl. $\mathcal{B}$ Diagonalgestalt. Wir hatten gesehen, dass (R^n, ψ) und (R^n, φ_B) isometrisch sind. Entsprechend gilt

$$\psi \;\cong\; \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \;:=\; \varphi_B \qquad \text{mit} \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} \;\in\; M_n(R). \tag{1.2}$$

Wir nennen $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ eine *Diagonalisierung* von ψ. Ist $\mathcal{B}$ die Standardbasis des R^n, so ist $\psi = \varphi_B$ und wir sagen, ψ habe *Diagonalgestalt*. Ziel dieses Unterabschnitts ist es, zu zeigen, dass jede *reguläre* quadratische Form eine Diagonalisierung besitzt.

1.1.8 Definition. *(1) Ein quadratischer Raum (M, q) über R heißt* regulär, *falls*

$$\Phi_M : M \longrightarrow \widehat{M}, \quad v \longmapsto (w \mapsto b_q(v, w)),$$

ein R-Modulisomorphismus ist. Dabei ist $\widehat{M}$ der Dualraum von M über R.

(2) Eine quadratische Form φ der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ über R heißt regulär*, wenn* $\det(A_\varphi) \in R^*$ *liegt. Für $n = 0$ ist A_φ die leere Matrix und wir definieren* $\det(A_\varphi) := 1$.

Aus Definition 1.1.4 folgt sofort, dass jeder zu (M, q) isometrische quadratische Raum genau dann regulär ist, wenn (M, q) regulär ist. Ferner folgt aus der Multiplikativität der Determinanten, dass der Begriff der Regularität von quadratischen Formen ebenfalls invariant unter Isometrie ist.

1.1.9 Lemma. *Eine quadratische Form φ der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ über R ist genau dann regulär, wenn (R^n, φ) regulär ist.*

Beweis. Aus Definition 1.1.8 folgt, dass der 0-dimensionale quadratische Raum und die 0-dimensionale quadratische Form regulär sind. Sei also $n > 0$ und $A_\varphi = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Mit $\{\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_n\} \subset \widehat{R^n}$ bezeichnen wir die Dualbasis der Standardbasis, welche definiert ist durch

$$\widehat{e}_i(e_j) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt $\Phi_{R^n}(e_i)(e_j) = b_\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$ und somit $\Phi_{R^n}(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\widehat{e}_j$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Also wird Φ_{R^n} von A_φ dargestellt, und die Behauptung folgt aus Definition 1.1.8. □

Sei (M, q) ein quadratischer Raum über R. Wir untersuchen nun zunächst die Frage, wann es zu einem gegebenen freien Untermodul $U \subset M$ einen freien Untermodul $V \subset M$ mit $M = U \perp V$ gibt. Insbesondere interessiert uns, unter welchen Voraussetzungen $U^\perp$ tatsächlich ein orthogonales Komplement von U ist.

1.1.10 Satz. *Sei (M, q) ein quadratischer Raum. Ist $(U, \varphi|_U)$ regulär, so existiert eine orthogonale Zerlegung $M = U \perp U^\perp$.*

Beweis. Es ist $\Phi_U : U \to \widehat{U}$ injektiv und somit $\{0\} = \ker(\Phi_U) = U \cap U^\perp$. Da Φ_U auch surjektiv ist, existiert zu jedem $v \in M$ wegen $\Phi_M(v)|_U \in \widehat{U}$ ein $u \in U$ mit $\Phi_M(v)|_U = \Phi_U(u)$. Per Definition gilt $b_q(v, w) = b_q(u, w)$ für alle $w \in U$. Somit liegt $v - u \in U^\perp$ und es existiert eine Darstellung $v = u + x$ mit $u \in U$ und $x = v - u \in U^\perp$. Folglich gilt $M = U \oplus U^\perp$. Da zusätzlich $b_q(u, v) = 0$ für alle $u \in U$ und alle $v \in U^\perp$ gilt, folgt die Behauptung. □

1.1.11 Korollar. *Ist φ eine quadratische Form über R der Dimension $n \geq 1$ und $v \in R^n$ mit $\varphi(v) = a \in R^*$, so existiert eine $(n-1)$-dimensionale quadratische Form ψ über R mit $\varphi \cong \langle a \rangle \perp \psi$. Insbesondere ist $\langle a \rangle$ regulär.*

Beweis. Der R-Modul Rv wird frei von v erzeugt. Denn ist $cv = 0$, $c \in R$, so folgt $0 = b_\varphi(cv, v) = ca$, und es muss $c = 0$ sein, da $a \in R^*$ liegt. Sei $f \in \widehat{Rv}$ und $f(v) = b$. Dann ist $\Phi_M(\frac{b}{a}v)(v) = b_\varphi(\frac{b}{a}v, v) = b$. Aus der Linearität von f und $\Phi_M(\frac{b}{a}v)$ folgt $f = \Phi_M(\frac{b}{a}v)|_{Rv} = \Phi_{Rv}(\frac{b}{a}v)$. Also ist Φ_{Rv} ein Isomorphismus und $(Rv, q|_{Rv})$ regulär. Da (a) die assoziierte Matrix von $(Rv, q|_{Rv})$ bzgl. $\{v\}$ ist, gilt $(Rv, q|_{Rv}) \cong (R, \langle a \rangle)$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.1.10. □

Es stehen uns nun die Mittel zur Verfügung, die wir benötigen, um zu beweisen, dass jede reguläre quadratische Form eine Diagonalisierung besitzt. Der Beweis verläuft induktiv, wobei der Induktionsschritt im Wesentlichen aus dem vorherigen Korollar folgt.

1.1.12 Lemma. *Sei φ eine n-dimensionale quadratische Form über R, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eine orthogonale Zerlegung*

$$\varphi \;\cong\; \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \perp \psi \qquad \textit{mit} \qquad a_1, \ldots, a_k \in R^* \quad \textit{und} \quad \psi(v) \in \mathfrak{m} \;\; \forall\, v \in R^{n-k},$$

wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R ist. Insbesondere ist $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ regulär.

Falls nicht $\varphi(v) \in \mathfrak{m}$ für alle $v \in R^n$ gilt, kann bei der Konstruktion der Zerlegung von φ das Element $a_1 \in R^*$ so beliebig gewählt werden, dass ein $v \in R^n$ mit $\varphi(v) = a_1$ existiert.

Beweis. Liegt $\varphi(v) \in \mathfrak{m}$ für alle $v \in M$, so setzen wir $k := 0$ und $\psi := \varphi$. Andernfalls wähle ein $v_1 \in R^n$ mit $\varphi(v_1) = a_1 \in R^*$. Nach Korollar 1.1.11 existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \langle a_1 \rangle \perp \zeta$ mit einem regulären $\langle a \rangle$ und einer $(n-1)$-dimensionalen Teilform ζ von φ. Nun wiederholen wir das Verfahren mit ζ statt φ. Da $n < \infty$ gilt, erhalten wir so nach endlich vielen Schritten die gewünschte Zerlegung. Die Regularität von $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ folgt aus der Tatsache, dass $a_1 \cdots a_k \in R^*$ die Determinante der assoziierten Matrix von $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ ist. □

1.1.13 Theorem. *Zu jeder regulären, n-dimensionalen quadratischen Form φ über R, $n \in \mathbb{N}$, und jedem $a_1 \in R^*$, zu dem es ein $v \in R^n$ mit $\varphi(v) = a_1$ gibt, existiert eine Diagonalisierung*

$$\varphi \;\cong\; \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \qquad \textit{mit} \qquad a_2, \ldots, a_n \in R^*.$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.12 existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \perp \psi$, so dass $a_1, \ldots, a_k \in R^*$ liegen und $\psi(v)$ für alle $v \in R^{n-k}$ in $\mathfrak{m}$ liegt. Aus (1.1) folgt somit, dass alle Einträge und somit auch die Determinante von A_ψ in $\mathfrak{m}$ liegen. Da $\mathfrak{m}$ ein Ideal ist, liegt die Determinante der assoziierten Matrix von $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \perp \psi$ nicht in $R^* = R \setminus \mathfrak{m}$. Dies widerspricht der Regularität von φ, weshalb $k = n$ und $\psi = 0$ gelten muss. □

1.1.3 Die Witt-Zerlegung

Um zu bestimmen, ob eine gegebene quadratische Form φ der Dimension $n \in \mathbb{N}$ über R regulär ist, betrachtet man die Determinante der assoziierten Matrix von φ. Ist ψ eine zu φ isometrische quadratische Form über R und $T \in GL_n(R)$ die zugehörige Isometrie, so gilt

$$\det(A_\varphi) = \det(T^t A_\psi T) = \det(T)^2 \det(A_\psi). \tag{1.3}$$

Das heißt, die Determinante der assoziierten Matrix ist im allgemeinen nicht invariant unter Isometrie. Entsprechend eignet sie sich nicht als Invariante. Wir definieren nun die Determinante einer quadratischen Form φ. Diese ergibt sich zwar aus der Determinante der assoziierten Matrix von φ, ist allerdings, wie aus Gleichung (1.3) hervorgeht, invariant unter Isometrie.

1.1.14 Definition. *Sei φ eine reguläre quadratische Form der Dimension n über R.*

(1) Wir nennen

$$\mathcal{G}(R) \;:=\; {}^{R^*}\!/_{R^{*2}}$$

die Quadratklassengruppe *von R. Die Quadratklasse von $a \in R^*$ wird mit $[a]^\square := aR^{*2} \in \mathcal{G}(R)$ bezeichnet. Betrachten wir die Quadratklasse von $a \in R^*$ in einer Ringerweiterung S von R, so schreiben wir $[a]_S^\square := aS^{*2} \in \mathcal{G}(S)$, um dies zu verdeutlichen.*

(2) Sei $n \geq 1$. Nach Theorem 1.1.13 existieren $a_1, \ldots, a_n \in R^*$ mit $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Wir definieren die Determinante *von φ durch*

$$\det(\varphi) \ := \ [\det(A_\varphi)]^\square \ = \ \left[\prod_{i=1}^{n} a_i\right]^\square \in \mathcal{G}(R).$$

Für $\dim(\varphi) = 0$ setzen wir $\det(\varphi) = 1$.

1.1.15 Bemerkung. Offensichtlich gilt $\langle a \rangle \cong \langle ac^2 \rangle$ für alle $a, c \in R^*$. Ist also φ eine reguläre quadratische Form über R mit $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $a_1, \ldots, a_n \in R^*$, so interessieren die Diagonaleinträge a_i nur bis auf quadratische Faktoren. Entsprechend sei die Notation $\varphi \cong \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ für $\alpha_i \in \mathcal{G}(R)$ erlaubt, wenn die quadratische Form φ nur bis auf Isometrie betrachtet wird. △

1.1.16 Lemma. *Sei $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ eine reguläre quadratische Form über R. Ist $\psi = \langle b_1, \ldots, b_{n-1} \rangle$ eine Teilform von φ, so ist*

$$\varphi \cong \langle b_1, \ldots, b_{n-1}, c \rangle \qquad \textit{mit} \quad c = b_1 \cdots b_{n-1} d \quad \textit{und} \quad [d]^\square = \det(\varphi).$$

Beweis. Nach Definition einer Teilform existiert ein $c \in R^*$ mit $\varphi \cong \psi \perp \langle c \rangle$. Sei $d' = a_1 \cdots a_n$. Da die Determinante invariant unter Isometrie ist, muss $\det(\varphi) = \det(\psi \perp \langle c \rangle)$ gelten. Das heißt, es existiert ein $\lambda \in R^*$ mit $d' \lambda^2 = b_1 \cdots b_{n-1} c$. Da $b_1, \cdots, b_{n-1} \in R^*$ liegen und somit invertierbar sind, gilt

$$c \ = \ b_1 \cdots b_{n-1} d' \left(\frac{\lambda}{b_1 \cdots b_{n-1}} \right)^2 .$$

Mit $d := d'(\frac{\lambda}{d_1 \cdots b_{n-1}})^2$ folgt die Behauptung. □

Ein großer Teil der algebraischen Theorie quadratischer Formen beschäftigt sich mit der Frage nach den Werten, die eine n-dimensionale quadratische Form φ über R, betrachtet als quadratische Abbildung, annehmen kann. Von besonderem Interesse sind dabei die Nullstellen von φ. Natürlich gilt immer $\varphi(0) = 0$. Es stellt sich also die Frage, ob und wie viele $v \in R^n$ mit $v \neq 0$ und $\varphi(v) = 0$ es gibt. Doch bevor wir die nötige Terminologie für die Untersuchung dieser Frage einführen, zitieren wir den Kürzungssatz von Witt. Dieser wird uns noch häufig von Nutzen sein, wenn es um die Eindeutigkeit von orthogonalen Zerlegungen geht.

1.1.17 Satz. (Witts Kürzungssatz)
Seien φ, φ_1 und φ_2 reguläre quadratische Formen über R, so dass

$$\varphi \perp \varphi_1 \ \cong \ \varphi \perp \varphi_2$$

gilt. Dann folgt $\varphi_1 \cong \varphi_2$.

[MH73, Theorem 4.4, Seite 8], [Sch85, Theorem 6.6, Chap. 1, Seite 21]

1.1.18 Definition. *Sei φ eine n-dimensionale quadratische Form über R, $n \in \mathbb{N}_0$.*

(1) Wir sagen, dass φ ein Element $a \in R$ darstellt*, wenn es ein $v \in R^n$ mit $a = \varphi(v)$ gibt.*

(2) Es ist

$$D_R(\varphi) \ := \ \{a \in R \mid \exists\, v \in R^n,\, v \neq 0,\ \textit{mit}\, \varphi(v) = a\}$$

die Menge aller von φ dargestellten Elemente. Setze $D_R^*(\varphi) := D_R(\varphi) \cap R^*$.

(3) Wir nennen φ universell, *wenn $D_R^*(\varphi) = R^*$ gilt.*

(4) Die Form φ heißt isotrop, *wenn $0 \in D_R(\varphi)$ liegt. Andernfalls heißt φ* anisotrop. *Beachte, dass nach dieser Definition die 0-dimensionale quadratische Form anisotrop ist.*

1.1.19 Lemma. *Sei ψ eine isotrope, reguläre, quadratische Form der Dimension $n \geq 2$ über R und $v \in R^n$ mit $\psi(v) = 0$.*

(1) Es existiert ein $w \in R^n$ so, dass v und w linear unabhängig sind und $b_\psi(v, w) \in R^*$ liegt.

(2) Es kann $w \in R^n$ so gewählt werden, dass $\psi(w) = 0$ und $b_\psi(v, w) = 1$ gilt.

Beweis. (1): Wir nehmen an, es liegt $b_\psi(v, w) \in \mathfrak{m}$ für alle $w \in R^n$. Vervollständige v zu einer geordneten Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ des R^n mit $b_1 = v$. Dann ist $b_\psi(b_1, b_1) = 0$ und $b_\psi(b_1, b_i) = m_i \in \mathfrak{m}$ für $i = 2, \dots, n$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R ist. Die erste Zeile der assoziierten Matrix $B = (b_\psi(b_i, b_j))_{i,j=1,\dots,n}$ von (R^n, ψ) bzgl. $\mathcal{B}$ hat die Gestalt $(0, m_2, \dots, m_n)$. Entwickeln wir die Determinante von B nach der ersten Zeile, so sehen wir, dass $\det(B) \notin R^*$ liegt, da $\mathfrak{m}$ ein Ideal ist. Dies stellt einen Widerspruch zur Regularität von ψ dar, da (R^n, ψ) und (R^n, φ_B) isometrisch sind.

(2)[2]*:* Nach (1) liegt $b_\psi(v, w) = b \in R^*$. Es folgt $b_\psi(v, \frac{1}{b}w) = 1$. Setze $w' = \frac{1}{b}w$. Da $b_\psi(v, w') \neq 0 = b_\psi(v, v)$ gilt, müssen v und w' linear unabhängig sein. Für beliebiges $\lambda \in R$ sind folglich auch v und $u := w' + \lambda v$ linear unabhängig mit $\psi(v) = 0$ und $b_\psi(v, u) = 1$. Aus der Bilinearität von b_ψ folgt

$$\psi(u) \;=\; b_\psi(u, u) \;=\; 2\lambda b_\psi(w', v) + \psi(w') + \lambda^2 \psi(v) \;=\; \psi(w') + 2\lambda.$$

Da 2 in R invertierbar ist, können wir $\lambda := -\frac{\psi(w')}{2}$ setzen. Es folgt $\psi(u) = 0$. □

1.1.20 Korollar. *Bis auf Isometrie existiert genau eine reguläre, isotrope quadratische Form der Dimension 2 über R. Diese ist gegeben durch*

$$\varphi \;=\; 2X_1X_2 \in R[X_1, X_2] \qquad \textit{mit} \qquad A_\varphi \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\varphi \cong \langle a, -a \rangle$ für alle $a \in R^*$, und φ ist insbesondere universell. Die Form $\langle 1, -1 \rangle$ bezeichnen wir mit $\mathbb{H}$. Die Elemente der Isometrieklasse von $\mathbb{H}$ heißen hyperbolische Ebenen.

Beweis. Sei ψ eine isotrope, reguläre, 2-dimensionale quadratische Form über R. Nach Lemma 1.1.19 (2) existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ des R^2, so dass $\psi(b_1) = 0 = \psi(b_2)$ und $b_\psi(b_1, b_2) = 1$ gilt. Folglich ist $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die assoziierte Matrix von (R^2, ψ) bzgl. $\mathcal{B}$. Wir erhalten $\psi \cong \varphi_A$. Also ist $\varphi := \varphi_A$ die gesuchte quadratische Form.

Für beliebiges $x = (x_1, x_2)^t \in R^2$ gilt $\varphi(x) = 2x_1x_2$. Ist $a \in R^*$ beliebig, so gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ a \end{pmatrix}\right) \;=\; 2\frac{1}{2}a \;=\; a.$$

Also ist φ universell. Weiterhin existiert nach Theorem 1.1.13 eine Darstellung $\varphi \cong \langle a, b \rangle$ mit $b \in R^*$. Nach Lemma 1.1.16 kann $b = -a$ gewählt werden, da $\det(\varphi_A) = [-1]^\square$ gilt. □

[2]Die Idee zu diesem Beweis stammt aus [Pfi95]. Dort zeigt Pfister im Beweis von Proposition 1.11 auf Seite 5 dieselbe Aussage für quadratische Formen über Körpern. Pfisters Beweis kann unter der Voraussetzung ohne Änderung für lokale Ringe übernommen werden, dass Aussage (1) und also die Existenz eines $w \in R^n$ mit $b_\varphi(v, w) \in R^*$ gezeigt wurde. Über Körpern folgt dies direkt aus der Regularität von φ.

Wir wollen nun zeigen, dass jede reguläre quadratische Form φ über R so als orthogonale Summe zweier Teilformen χ und φ_{an} dargestellt werden kann, dass χ orthogonale Summe hyperbolischer Ebenen und φ_{an} anisotrop ist. Diese Zerlegung wird *Witt-Zerlegung* genannt und stellt eine der wichtigsten Grundlagen in der algebraischen Theorie quadratischer Formen dar. Die Definition des Wittrings eines kommutativen, lokalen Rings (bzw. eines Körpers) beruht im Wesentlichen auf dieser Art von Zerlegung. Ferner ermöglicht erst die Witt-Zerlegung die sinnvolle Definition von generischen Zerfällungstürmen in Abschnitt 2.2.

1.1.21 Proposition. *Sei φ eine n-dimensionale, isotrope, reguläre quadratische Form über R, $n \geq 2$. Dann existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \mathbb{H}\perp\psi$ mit einer $(n-2)$-dimensionalen quadratischen Form ψ über R.*

Beweis. Nach Lemma 1.1.19 existieren Elemente b_1 und b_2 mit $\varphi(b_1) = 0 = \varphi(b_2)$ und $b_\varphi(b_1, b_2) = 1$. Sei U der von v_1 und v_2 erzeugte freie Untermodul von R^n, und sei $V = U^\perp$. Da $(U, \varphi|_U) \cong (R^2, \mathbb{H})$ regulär ist, existiert nach Satz 1.1.10 eine Zerlegung $R^n = U\perp V$. Es folgt $\operatorname{rang}(V) = n-2$ und die Existenz einer quadratischen Form ψ über R mit $(R^{n-2}, \psi) \cong (V, \varphi|_V)$. Wir erhalten $\varphi \cong \mathbb{H}\perp\psi$. □

Im Folgenden benötigen wir für $r \in \mathbb{N}_0$ die Notation

$$r \times \varphi \;:=\; \underbrace{\varphi\perp\ldots\perp\varphi}_{r\text{-mal}}.$$

Nun können wir die Existenz der Witt-Zerlegung durch unter Umständen wiederholte Anwendung der letzten Proposition beweisen. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Kürzungssatz von Witt 1.1.17.

1.1.22 Theorem. (Witt-Zerlegung)
Jede reguläre quadratische Form φ über K lässt sich darstellen als

$$\varphi \;\cong\; (i \times \mathbb{H}) \perp \varphi_{an}$$

mit einem eindeutig bestimmten $i \in \mathbb{N}_0$ und einer bis auf Isometrie eindeutig bestimmten anisotropen Form φ_{an} über K.

1.1.23 Definition. *Sei φ eine reguläre quadratische Form über R und $\varphi \cong (i \times \mathbb{H}) \perp \varphi_{an}$ die Zerlegung aus dem vorherigen Theorem.*

(1) Wir nennen i den Wittindex *von φ und bezeichnen ihn mit $i(\varphi)$. Die Form φ_{an} heißt* anisotroper Kern *von φ.*

(2) Die Form φ über R heißt hyperbolisch, *falls $\varphi \cong i \times \mathbb{H}$ mit $i \geq 1$ gilt.*

Abschließend beweisen wir eine Charakterisierung von hyperbolischen Formen, die wir vor allem für den Beweis von Satz 2.1.24 benötigen werden.

1.1.24 Satz. *Eine reguläre quadratische Form φ der Dimension $n \geq 2$ über K ist genau dann hyperbolisch, wenn (R^n, φ) einen freien Untermodul N mit $N^\perp = N$ und $\operatorname{rang}(N) = \frac{n}{2}$ enthält.*

Beweis. Sei φ hyperbolisch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$\varphi \;=\; i \times \mathbb{H} \;=\; \underbrace{\langle 1,-1\rangle \perp \ldots \perp \langle 1,-1\rangle}_{i-\text{mal}}$$

(Gleichheit statt Isometrie!) mit $i \in \mathbb{N}$ annehmen. Sei $n = 2i$ und $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des R^n. Betrachtet man die assoziierte Matrix von $i \times \mathbb{H}$, so wird deutlich, dass $\varphi(e_{2k-1} + e_{2k}) = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, i\}$ gilt. Sei N der von den $e_{2k-1} + e_{2k}$ erzeugte freie Untermodul von R^n. Offensichtlich gilt $\operatorname{rang}(N) = \frac{n}{2}$. Da $\mathcal{E}$ eine Orthogonalbasis von (R^n, φ) ist, folgert man aus der Bilinearität von b_φ leicht $b_\varphi(e_{2k-1} + e_{2k}, e_{2l-1} + e_{2l}) = 0$ für alle $k, l = \{1, \ldots, i\}$, $k \neq l$. Den Fall $k = l$ haben wir bereits weiter oben behandelt. Es folgt $N \subset N^\perp$. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in R^n$ mit $b_\varphi(x, b_{2k-1} + b_{2k}) = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, i\}$. Dann ist

$$0 \;=\; b_\varphi(x, e_{2k-1} + e_{2k}) \;=\; x_{2k-1} b_\varphi(e_{2k-1}, e_{2k-1}) + x_{2k} b_\varphi(e_{2k}, e_{2k}) \;=\; x_{2k-1} - x_{2k}$$

und also $x_{2k} = x_{2k+1}$ für alle $k \in \{1, \ldots, i\}$. Es folgt $x \in N$ und somit $N = N^\perp$.

Sei $N \subset R^n$ ein freier Untermodul mit $N = N^\perp$ und $\operatorname{rang}(N) = \frac{n}{2}$, und sei $\{b_1, \ldots, b_i\}$ mit $2i = n$ eine beliebige Basis von N. Vervollständige diese durch $b_{i+1}, \ldots, b_n$ zu einer Basis des R^n. Da φ regulär ist, besitzt die Matrix $B = (\beta_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} := (b_\varphi(b_k, b_l))_{k,l=1,\ldots,n}$ ein Inverses $C = (\gamma_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$. Für $k = 1, \ldots, n$ setze $c_k := \gamma_{1k} b_1 + \cdots + \gamma_{nk} b_n$. Da B invertierbar ist, bildet $\{c_1, \ldots, c_n\}$ eine Basis des R^n. Es gilt

$$b_\varphi(b_k, c_l) \;=\; \beta_{k1}\gamma_{1l} + \cdots + \beta_{kn}\gamma_{nl} \;=\; (BC)_{kl} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hieraus folgt, dass $c_{i+1}, \ldots, c_n \in N^\perp = N$ liegen und somit wegen $\operatorname{rang}(N) = i$ eine Basis von N bilden. Setze $d_k := b_k$ und $d_{i+k} := c_k$ für $k = 1, \ldots, i$. Dann bildet $\mathcal{D} := (d_1, \ldots, d_n)$ eine geordnete Basis des R^n und die assoziierte Matrix D von (R^n, φ) bzgl. $\mathcal{D}$ hat die Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} 0 & E_i \\ E_i & D' \end{smallmatrix}\right)$ mit einer symmetrischen Matrix $D' \in M_i(R)$ und der Einheitsmatrix $E_i \in M_i(R)$. Setzen wir $T := \left(\begin{smallmatrix} E_i & T' \\ 0 & E_i \end{smallmatrix}\right)$ mit $T' = -\frac{1}{2} D'$, so liegt $T \in GL_n(R)$ und es gilt $A := T^t D T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_i \\ E_i & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Indem wir die Basiselemente angemessen permutieren erhalten wir $(R^n, \varphi) \cong (R^n, \varphi_A) \cong (R^n, i \times \mathbb{H})$. □

1.1.4 Der Wittring eines lokalen Ringes

Seien $A \in M_m(R)$ und $B \in M_n(R)$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren das Tensorprodukt von A und B durch

$$A \otimes B \;=\; (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \otimes B \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \ldots & a_{mm}B \end{pmatrix} \;\in\; M_{mn}(R).$$

Ist $m = 0$ oder $n = 0$, so ist die Matrix $A \otimes B$ leer.

Leicht lassen sich die folgenden Rechenregeln überprüfen.

1.1.25 Lemma. *Für Matrizen $A, A' \in M_r(R)$, $B, B' \in M_s(R)$ und $C \in M_t(R)$, $r, s, t \in \mathbb{N}_0$, gelten die folgenden Gleichungen.*

(1) $(A + A') \otimes B = A \otimes B + A' \otimes B$ *und* $A \otimes (B + B') = A \otimes B + A \otimes B'$

(2) $(AA') \otimes (BB') = (A \otimes B)(A' \otimes B')$

(3) $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$*, und hieraus folgt sofort, dass* $A \otimes B$ *symmetrisch ist, falls dies für* A *und* B *gilt.*

(4) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

Seien jeweils $A, A' \in M_m(R)$ und $B, B' \in M_n(R)$ kongruent, dass heißt es existieren $C \in GL_m(R)$ und $D \in GL_n(R)$ mit $A = C^t A' C$ und $B = D^t B' D$. Dann gilt nach Lemma 1.1.25 (2) und (3)

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (C^t A' C) \otimes (D^t B' D) \\ &= (C^t \otimes D^t)(A' \otimes B')(C \otimes D) = (C \otimes D)^t (A' \otimes B')(C \otimes D). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dies bedeutet, dass auch $A \otimes B$ und $A' \otimes B'$ kongruent sind.

1.1.26 Definition. *Seien* ψ *und* χ *quadratische Formen über* R*. Wir definieren das* Produkt *von* ψ *und* χ *durch*

$$\psi \otimes \chi := \varphi_B \qquad \textit{mit} \qquad B = A_\psi \otimes A_\chi .$$

Ist φ eine quadratische Form über K, so bezeichnen wir mit $[\varphi]$ die Isometrieklasse von φ und definieren

$$\widehat{W}^+(R) := \{[\varphi] \mid \varphi \text{ ist eine reguläre quadratische Form über } R\}$$

als die Menge aller Isometrieklassen regulärer quadratischer Formen über R. Auf $\widehat{W}^+(R)$ lässt sich nun eine Addition und eine Multiplikation definieren durch

$$[\varphi] \perp [\psi] := [\varphi \perp \psi] \qquad \text{bzw.} \qquad [\varphi] \otimes [\psi] := [\varphi \otimes \psi] .$$

Aus der Definition der orthogonalen Summe wird sofort deutlich, dass die Addition in $\widehat{W}^+(R)$ wohldefiniert ist. Das Nullelement ist die 0-dimensionale Form. Gleichung (1.4) liefert uns die Wohldefiniertheit der Multiplikation.

1.1.27 Lemma. *Die Multiplikation in der Halbgruppe* $\widehat{W}^+(R)$ *ist assoziativ, kommutativ und erfüllt das Distributivgesetz. Die Klasse* $[\langle 1 \rangle]$ *ist das Einselement. Also ist* $\widehat{W}^+(R)$ *ein kommutativer Halbring.*

[Sch85, Theorem 1.8, Seite 32]

Beweis. Die Assoziativität folgt aus Lemma 1.1.25 (4). Sind $A \in M_m(R)$ und $B \in M_n(R)$, so folgt die Kommutativität aus der Kongruenz von $A \otimes B$ und $B \otimes A$, die gegeben ist durch $A \otimes B = C^t (B \otimes A) C$ mit

$$C = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} & \dots & E_{m1} \\ E_{12} & E_{22} & \dots & E_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{1n} & E_{2n} & \dots & E_{mn} \end{pmatrix}, \qquad M_{m \times n}(R) \ni (E_{rs})_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ falls } (i,j) = (r,s) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Das Distributivgesetz folgt aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \otimes B \;=\; \begin{pmatrix} A \otimes B & 0 \\ 0 & A' \otimes B \end{pmatrix},$$

und $(1) \otimes A = A$ liefert uns die Aussage über das Einselement. □

Um in Zukunft unnötig umständliche Formulierungen zu vermeiden, einigen wir uns auf die folgenden Schreibweisen. Sind $\varphi \cong \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ und $\psi \cong \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ zwei quadratische Formen über R, so ist

$$\varphi \perp \psi \;\cong\; \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \rangle \qquad \text{und} \qquad \varphi \otimes \psi \;\cong\; \langle \dots, a_i b_j, \dots \rangle_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Weiterhin gilt für $a \in R^*$

$$a\varphi \cong \langle aa_1, \dots, aa_m \rangle.$$

Es wäre wünschenswert, wenn es sich bei $\widehat{W}^+(R)$ um einen Ring handelte. Das ist nun leider nicht der Fall. Genauer existiert in $\widehat{W}^+(R)$ zu keinem Element $[\varphi] \neq 0$ ein additives Inverses. Deshalb wendet man die Grothendieck-Konstruktion auf $\widehat{W}^+(R)$ an. Hierbei handelt es sich um ein Verfahren, das aus einer beliebigen abelschen Halbgruppe H^+ eine abelsche Gruppe G konstruiert. Diese hat die universelle Eigenschaft, dass jeder Halbgruppen-Homomorphismus $H^+ \to G'$ in eine abelsche Gruppe G' über G faktorisiert. Auf diese Weise erhält man den Grothendieck-Witt-Ring $\widehat{W}(R)$. Eine genauere Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in [Sch85, Chapter 2, §1].

Uns interessiert aber vor allem der Wittring $W(R)$. Dieser ist der Faktorring von $\widehat{W}(K)$ modulo dem Ideal aller hyperbolischen quadratischen Formen über K. Der Wittring lässt sich aber noch wesentlich einfacher mit Hilfe einer Äquivalenzrelation konstruieren.

1.1.28 Definition. *Zwei reguläre quadratische Formen φ und ψ heißen* äquivalent*, falls*

$$\varphi_{an} \;\cong\; \psi_{an}$$

gilt. Wir schreiben dann $\varphi \sim \psi$. Hierbei handelt es sich offensichtlich um eine Äquivalenzrelation. Ist φ eine reguläre Form über R, so bezeichnen wir mit $\{\varphi\}$ ihre Äquivalenzklasse.

Sei $W(R)$ die Menge aller Äquivalenzklassen regulärer quadratischer Formen über R, und seien φ und ψ reguläre quadratische Formen über R. Dann lassen sich Addition und Multiplikation auf $\widehat{W}^+(R)$ durch

$$\{\varphi\} \oplus \{\psi\} := \{\varphi \perp \psi\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{\varphi\} \otimes \{\psi\} := \{\varphi \otimes \psi\}$$

natürlich auf $W(K)$ fortsetzen. Offensichtlich ist die Operation $\oplus$ wohldefiniert. Dasselbe müssen wir noch für $\otimes$ zeigen. Es ist $\varphi \otimes \mathbb{H} \cong \varphi \perp (-\varphi)$ nach Korollar 1.1.20 hyperbolisch. Aus

$$\varphi \otimes (\psi \perp \mathbb{H}) \;\cong\; (\varphi \otimes \psi) \perp (\varphi \otimes \mathbb{H}).$$

folgt sofort die Wohldefiniertheit von $\otimes$ in $W(R)$, da $\varphi \otimes \mathbb{H}$ hyperbolisch ist. Assoziativität, Kommutativität und die Gültigkeit des Distributivgesetzes werden von $\widehat{W}^+(R)$ geerbt.

Das Nullelement in $W(R)$ ist die Äquivalenzklasse aller hyperbolischen quadratischen Formen über R. Denn ist φ eine reguläre quadratische Form über R, so ist $\varphi \perp (-\varphi)$ hyperbolisch, und es folgt

$$\{\varphi\} \oplus \{-\varphi\} \;=\; \{\varphi\} \oplus (-\{\varphi\}) \;=\; 0$$

Ist $\{\psi\}$ ein weiteres Element aus $W(K)$, so schreiben wir in Zukunft anstatt $\{\varphi\} \oplus (-\{\psi\})$ kürzer $\{\varphi\} \ominus \{\psi\}$.

1.1.29 Definition. *Der kommutative Ring $W(R)$ heißt* Wittring *von R.*

Abschließend wollen wir als Vorbereitung auf das eigentliche Thema dieser Arbeit einen kommutativen Ring S mit lokalem Teilring R betrachten. Sei $\varphi \in R[X_1, \ldots, X_n]$ eine quadratische Form über R mit $\dim(\varphi) = n$. Aus $R \subset S$ folgt $R[X_1, \ldots, X_n] \subset S[X_1, \ldots, X_n]$. Somit kann φ auch als quadratische Form über S aufgefasst werden. Betrachten wir φ über S, so schreiben wir φ_S statt φ, um dies zu verdeutlichen. Eine etwas ältere, aber ebenso gebräuchliche Schreibweise ist $\varphi \otimes S$. Da beide Schreibweisen unterschiedliche Vor- und Nachteile haben, werden in dieser Arbeit beide Verwendung finden.

1.2 Quadratische Formen über Körpern

Im letzten Abschnitt hatten wir den Wittring eines kommutativen, lokalen Ringes R eingeführt. Die zugehörigen Resultate über die möglichen Zerlegungen einer quadratischen Form und alle übrigen Resultate lassen sich ohne Änderung für den Spezialfall übertragen, dass $R = K$ ein Körper ist. Der erste Unterabschnitt dieses Abschnitts beschäftigt sich nun bereits mit dem Verhalten quadratischer Formen unter Körpererweiterungen. Dabei betrachten wir zunächst nur rein transzendente und quadratische Erweiterungen von K. Diese Erweiterungen spielen in der Theorie der generischen Zerfällung eine besondere Rolle. Anschließend zitieren wir einige wichtige Resultate aus der Theorie der quadratischen Formen über Körpern, die wir als Grundlage für das Arbeiten mit solchen Formen unbedingt benötigen. Im zweiten Unterabschnitt führen wir die wohl wichtigste Klasse quadratischer Formen über Körpern ein, die Pfisterformen, und charakterisieren diese durch ihr multiplikatives Verhalten. Wir werden sehen, dass Pfisterformen insbesondere in der Theorie der generischen Zerfällung eine äußerst bedeutende Rolle spielen (siehe Abschnitt 2.2, 3.1 und 3.2). Schließlich betrachten wir im letzten Unterabschnitt das Fundamentalideal $I(K)$ des Wittrings eines Körpers. Wir definieren den Dimensionsindex e_0 und die Diskriminante d, durch die sich die Elemente der ersten beiden Potenzen $I(K)$ und $I^2(K)$ des Fundamentalideals charakterisieren lassen, und zeigen, dass die n-te Potenz $I^n(K)$ additiv von n-fachen Pfisterformen erzeugt wird. Es sei hier erwähnt, dass sich die dritte Potenz des Fundamentalideals durch die Clifford-Invariante charakterisieren lässt, die wir im nächsten Abschnitt 1.3 einführen werden.

1.2.1 Grundlegende Resultate

Bis auf bilineare Formen, die kaum noch vorkommen werden, sind quadratische Formen die einzigen Formen, die wir betrachten werden. Mit Form sei also zukünftig immer eine quadratische gemeint, falls nichts Gegensätzliches aus dem Kontext hervorgeht.

Die Beweise aus Abschnitt 1.1 lassen sich direkt für Körper übertragen. Anstatt eines freien Moduls über R betrachtet man über Körpern natürlich Vektorräume, das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ersetzt man durch das Nullideal (0). Die Einschränkung, dass 2 in R invertierbar sein muss, bedeutet für einen Körper K, dass $\mathrm{char}(K) \neq 2$ vorausgesetzt wird. Fortan bezeichnen wir mit K immer einen Körper der Charakteristik $\neq 2$.

1.2.1 Definition. *Sei φ eine n-dimensionale Form über K, $n \in \mathbb{N}_0$. Den Unterraum*

$$\mathrm{Rad}(\varphi) \;:=\; \{v \in R^n \mid b_\varphi(w,v) = 0 \;\; \forall\, w \in R^n\} \;\subset\; R^n$$

nennen wir Radikal *von φ.*

Aus der Definition folgt sofort

$$\mathrm{Rad}(\varphi) \;=\; \left\{v \in R^n \;\middle|\; w^t A_\varphi v = 0 \;\; \forall\, w \in R^n\right\} \;=\; \{v \in R^n \mid A_\varphi v = 0\} \tag{1.5}$$

und somit

$$\varphi \text{ ist regulär.} \quad\Longleftrightarrow\quad \det(A_\varphi) \neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Rad}(\varphi) = \{0\}.$$

Sei nun $n \geq 1$ und φ nichtregulär. Nach Lemma 1.1.12 können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle \perp \psi$ mit $a_1, \ldots, a_k \in K^*$ und $\psi(v) = 0$ für alle $v \in R^{n-k}$

gilt. Ist B die assoziierte Matrix von $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ so erhalten wir

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man mit Hilfe von Gleichung (1.5) sehen, dass die Einheitsvektoren $e_{k+1}, \ldots, e_n$ das Radikal von φ erzeugen. Zudem wird deutlich, dass die Elemente von $\mathrm{Rad}(\varphi)$ keinerlei Einfluß auf die möglichen Werte von φ haben. Gerade diese sind es aber, die uns interessieren. Wir können also ebenso gut nur $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ betrachten. Da das Radikal und orthogonale Zerlegung, wie man leicht zeigt, invariant unter Isometrie sind, ist die Zerlegung $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \perp \psi$ bis Isometrie eindeutig. Deshalb können wir uns in Zukunft darauf beschränken, reguläre quadratische Formen zu betrachten. Bis zum Ende dieses Unterabschnittes allerdings werden wir der Allgemeinheit halber zumeist noch auf diese Einschränkung verzichten, da ein Großteil der Resultate auch für nichtreguläre Formen gültig ist.

Am Ende des Unterabschnitts 1.1.4 haben wir für einen kommutativen Ring S und eine Form φ über dem lokalen Unterring R von S, die Form φ_S über S definiert. Wir befassen uns nun mit dem Spezialfall, dass $R = K$ ein Körper und $S = L$ eine Körpererweiterung ist. Ist φ eine anisotrope Form über K, so stellt sich die Frage, ob φ_L weiterhin anisotrop ist oder nicht. Wie schon in der Einleitung formuliert ist dies eine der Hauptfragen, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen. Zunächst wollen wir den Spezialfall des rationalen Funktionenkörpers in einer Unbestimmten $L = K(X)$ betrachten.

1.2.2 Satz. *Sei $L = K(X)$. Eine quadratische Form φ ist genau dann anisotrop über K, wenn φ_L anisotrop über L ist.*

[Pfi95, Lemma 2.1, Seite 6]

Beweis. Für $\dim(\varphi) = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $\dim(\varphi) = n \geq 2$. Ist φ_L anisotrop, so natürlich auch φ, da $K \subset L$ liegt. Nehmen wir also an, es existiert ein $0 \neq f = (f_1, \ldots, f_n)^t \in L^n$ mit $\varphi_L(f) = 0$. Wähle einen gemeinsamen Nenner $g_0 \in K[X]$ von $f_1, \ldots, f_n$. Dann ist $f_i = \frac{g_i}{g_0}$ mit $g_1, \ldots, g_n \in K[X]$, und für $g = (g_1, \ldots, g_n)^t \in L^n$ gilt

$$\varphi_L(g) = g_0^2 \varphi_L(f) = 0.$$

Sei nun $0 \neq d \in K[X]$ der größte gemeinsame Teiler von $g_1, \ldots, g_n$. Dann existieren teilerfremde $h_1, \ldots, h_n \in K[X]$ mit $g_i = dh_i$. Für $h = (h_1, \ldots, h_n)^t$ gilt

$$\varphi_L(g) = d^2 \varphi_L(h) = 0.$$

Da $K[X]$ ein Integritätsring und $d \neq 0$ ist, folgt $\varphi_L(h) = 0$. Setze $c_i = h_i(0) \in K$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $c = (c_1, \ldots, c_n)^t \neq 0$, da sonst alle h_i durch X teilbar wären. Nach Konstruktion sind diese aber teilerfremd. Substituieren wir X durch 0 in der Gleichung $\varphi_L(h) = \varphi_L(h(X)) = 0$, so erhalten wir $\varphi(c) = 0$ und somit die Isotropie von φ. □

Mittels einfacher Induktion erhält man das folgende Korollar.

1.2.3 Korollar. *Ist L eine rein transzendente Körpererweiterung von K von endlichem Transzendenzgrad und φ eine quadratische Form über K. Dann ist φ genau dann anisotrop, wenn φ_L anisotrop ist.*

1.2.4 Theorem. *Sei $\varphi \cong \langle a\rangle \perp \varphi'$ eine anisotrope Form der Dimension $n \geq 2$ über K, und sei $d \in K^*$. Dann liegt $d \in D_K(\varphi')$ genau dann, wenn $d + aX^2 \in D_{K(X)}(\varphi \otimes K(X))$ liegt.*

[Sch85, Theorem 3.4, Seite 150]

Weiterhin ist der Fall einer algebraischen, quadratischen Körpererweiterung für uns von besonderem Interesse, wie in Unterabschnitt 2.1.3 noch deutlich werden wird. Die folgenden zwei Resultate beschäftigen sich mit diesem Fall.

1.2.5 Satz. *Sei $L = K(\sqrt{a})$ eine quadratische Erweiterung, also $a \in K^* \setminus K^{*2}$, und sei φ eine anisotrope Form über K mit $n = \dim(\varphi) \in \mathbb{N}_0$. Ist φ_L isotrop, so existiert ein $x \in K^*$ mit $\langle x, -xa\rangle \subset \varphi$.*

[Sch85, Lemma 5.1, Seite 45]

Beweis. Sei $v \in L^n$, $v \neq 0$, ein Vektor mit $\varphi_L(v) = 0$. Dann existiert eine Darstellung $v = b_1 + b_2\sqrt{a}$ mit $b_1, b_2 \in K^n$. Es gilt

$$0 \;=\; b_{\varphi_L}(b_1 + b_2\sqrt{a}, b_1 + b_2\sqrt{a}) \;=\; b_{\varphi_L}(b_1, b_1) + a \cdot b_{\varphi_L}(b_2, b_2) + 2\sqrt{a} \cdot b_{\varphi_L}(b_1, b_2).$$

Hieraus folgt $b_\varphi(b_1, b_2) = 0$, b_1 und b_2 stehen also orthogonal zueinander. Weiterhin folgt $\varphi(b_1) = -a\varphi(b_2)$. Vervollständige $\{b_1, b_2\}$ zu einer Orthogonalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ von V_φ mit $c_1 = b_1$ und $c_2 = b_2$. Sei $x_i = \varphi(c_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $\varphi \cong \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Es gilt $x_1 = -ax_2$ und somit $\varphi \cong \langle -ax_2, x_2, x_3, \ldots, x_n\rangle$. □

1.2.6 Korollar. *Sei $L = K(\sqrt{a})$ eine quadratische Erweiterung mit $a \in K^* \setminus K^{*2}$. Ist die n-dimensionale Form φ über K anisotrop und über L hyperbolisch, $n \in \mathbb{N}_0$, so existiert eine Form ψ über K mit $\varphi \cong \langle 1, -a\rangle \otimes \psi$.*

[Sch85, Remark 5.11, Seite 51]

Beweis. Nach dem vorherigen Satz ist $\varphi \cong x_1\langle 1, -a\rangle \perp \varphi'$ mit $x_1 \in K^*$. Da $x_1\langle 1, -a\rangle_L$ hyperbolisch ist, muss dies auch für φ'_L gelten. Per Induktion nach der Dimension von φ erhalten wir $\varphi \cong \langle x_1, \ldots, x_m\rangle \otimes \langle 1, -a\rangle$ mit $2m = n$. □

Zum Abschluss dieser Einführung zitieren wir drei grundlegende Resultate über quadratische Formen, von denen die ersten zwei in der algebraischen Theorie der quadratischen Formen zu den wichtigsten Hilfsmitteln gehören.

1.2.7 Satz. (Substitutionsprinzip)
Sei φ eine n-dimensionale quadratische Form über K, $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachte zu $m \in \mathbb{N}$ ein Polynom $0 \neq p = p(X_1, \ldots, X_m) \in K[X_1, \ldots, X_m]$ und beliebige Elemente $c_1, \ldots, c_m \in K$. Wird p von $\varphi \otimes K(X_1, \ldots, X_m)$ dargestellt, so wird $p(c_1, \ldots, c_m)$ von φ dargestellt.

[Pfi95, Proposition 3.1, Seite 10]

1.2.8 Theorem. (Teilform-Theorem)
Seien φ und $\psi = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle$, $m \in \mathbb{N}_0$, reguläre quadratische Formen über K, wobei φ anisotrop sei. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Es ist ψ eine Teilform von φ.

(ii) Für jeden Erweiterungskörper L von K gilt $D_L(\psi) \subseteq D_L(\varphi)$.

(iii) Die Form φ_L, $L := K(X_1, \ldots, X_m)$, stellt den generischen Wert *von ψ dar. Dies bedeutet, dass φ_L das Element*

$$\psi_L((X_1, \ldots, X_m)^t) \;=\; b_1X_1^2 + \cdots + b_mX_m^2 \;\in\; L$$

darstellt.

[Pfi95, Theorem 3.4, Seite 11]

1.2.9 Lemma. *Sei φ eine Form über K und $c \in K^*$. Dann gilt:*

$$c \in D_K(\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \perp \langle -c\rangle \text{ ist isotrop.}$$

[Pfi95, Proposition 1.4, Seite 21]

1.2.2 Pfisterformen

Von nun an sei jede quadratische Form regulär.

1.2.10 Definition. *Seien φ und ψ Formen über K. Existiert ein $a \in K^*$ mit $\varphi \cong a\psi$, so heißen φ und ψ* ähnlich, *und a wird* Ähnlichkeitsfaktor *genannt. Definiere*

$$G_K(\varphi) \;:=\; \{a \in K^* \mid \varphi \cong a\varphi\}$$

als die Menge aller Ähnlichkeitsfaktoren von φ. Nach Bemerkung 1.1.15 gilt grundsätzlich $K^{*2} \subset G_K(\varphi)$.

1.2.11 Lemma. *Sei φ eine Form über K. Dann ist $G_K(\varphi)$ eine Untergruppe von K^*.*

Beweis. Offensichtlich ist $1 \in G_K(\varphi)$. Seien $a, b \in G_K(\varphi)$. Dann gilt $\varphi \cong a\varphi$ und $\varphi \cong b\varphi$. Kombinieren wir die beiden Isometrien, so folgt $\varphi \cong ab\varphi$ und also $ab \in G_K(\varphi)$. Außerdem ist $\varphi \cong \frac{1}{a}a^2\varphi \cong \frac{1}{a}\varphi$ für $a \in G_K(\varphi)$. □

Seien $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ und $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$ zwei Vektoren von Unbestimmten der Länge $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $K(X) = K(X_1, \ldots, X_n)$ und $K(X, Y) = K(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ jeweils rein transzendente Körpererweiterungen von K vom Grad n bzw. $2n$.

1.2.12 Definition. *Sei φ eine Form über K der Dimension* $\dim(\varphi) = n \geq 1$ *und $L = K(X, Y)$. Die Form φ heißt* multiplikativ, *falls ein $Z \in L^n$ mit*

$$\varphi_L(X) \cdot \varphi_L(Y) \;=\; \varphi_L(Z)$$

existiert. Wir nennen φ streng multiplikativ, *falls es eine Matrix $T_X \in GL_n(K(X))$ gibt, so dass*

$$\varphi_L(X) \cdot \varphi_L(Y) \;=\; \varphi_L(T_XY) \tag{1.6}$$

gilt.

Da T_X invertierbar ist, ist Gleichung (1.6) aufgrund des Substitutionsprinzips 1.2.7 äquivalent zu

$$\varphi_{K(X)}(X) \cdot \varphi_{K(X)} \;\cong\; \varphi_{K(X)}.$$

Also ist $\varphi_{K(X)}(X)$ ein Ähnlichkeitsfaktor von $\varphi_{K(X)}$. Mit Hilfe des Substitutionsprinzips sehen wir, dass für streng multiplikative Formen $D_K^*(\varphi) \subset G_K(\varphi)$ gilt. Nach Lemma 1.2.11 wissen wir bereits, dass $G_K(\varphi)$ für jede Form φ eine Untergruppe von K^* ist. Der folgende Satz liefert dieselbe Aussage für $D_K^*(\varphi)$, falls φ multiplikativ ist.

1.2.13 Satz. *Eine Form φ über K ist genau dann multiplikativ, wenn $D_L^*(\varphi)$ für jeden Erweiterungskörper L von K eine Untergruppe von L^* ist.*

[Pfi95, Lemma 3.1, Seite 28]

1.2.14 Definition. *Eine Form über K heißt k-fache* Pfisterform*, wenn $a_1, \dots, a_k \in K^*$, $k \in \mathbb{N}$, existieren, so dass*

$$\varphi \;\cong\; \langle 1, a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_k\rangle \;=\; \bigotimes_{i=1}^{k} \langle 1, a_i\rangle.$$

Als abkürzende Schreibweise verwenden wir $\varphi \cong \langle\langle a_1, \dots, a_k\rangle\rangle$. Die 0-fache Pfisterform ist gegeben durch $\langle 1\rangle$.

Dies ist die Definition von Pfisterformen, wie sie Albrecht Pfister zuerst in [Pfi65] eingeführt hat. Ziemlich schnell wurde deutlich, was für eine immense Bedeutung Pfisterformen für die Theorie quadratischer Formen haben, woraufhin sie ihren jetzigen Namen erhielten. Allerdings ist dies inzwischen nicht mehr die allgemein gebräuchliche Definition. Wie später noch im Unterabschnitt über die Clifford-Invariante 1.3.3 deutlich werden wird, ist es häufig günstiger für $a_1, \dots, a_k \in K^*$ eine Pfisterform durch

$$\langle\langle a_1, \dots, a_k\rangle\rangle \;:=\; \bigotimes_{i=1}^{k} \langle 1, -a_i\rangle \tag{1.7}$$

zu definieren, da so der Zusammenhang zu Quaternionenalgebren deutlicher wird. Auch Pfister ist inzwischen in seinen aktuelleren Arbeiten zu dieser Definition von Pfisterformen übergegangen. Wir werden uns an die alte Definition halten, da dies für uns eine einfachere Notation bedeutet und die Verbindung zur Brauergruppe in dieser Arbeit nicht im Vordergrund steht.

1.2.15 Theorem. *Sei φ eine Form über K.*

(1) Ist φ anisotrop, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- *(i) φ ist multiplikativ.*
- *(ii) φ ist streng multiplikativ.*
- *(iii) φ ist eine Pfisterform.*

(2) Jede isotrope Form φ ist multiplikativ und genau dann streng multiplikativ, wenn sie hyperbolisch ist. Insbesondere ist jede isotrope Pfisterform streng multiplikativ und somit hyperbolisch.

[Pfi95, Theorem 2.2, Seite 25 bzw. 27; Theorem 3.2, Seite 29]

Die Aussage, dass jede isotrope Form multiplikativ ist, folgt sofort aus Theorem 1.1.22, welches impliziert, dass jede isotrope Form universell ist, und aus der Tatsache, dass eine isotrope Form φ über K über jedem Erweiterungskörper L von K isotrop bleibt.

1.2.16 Korollar. *Für streng multiplikative Formen φ über K gilt $D_K^*(\varphi) = G_K(\varphi)$.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass $D_K^*(\varphi) \subset G_K(\varphi)$ gilt. Sei $a \in G_K(\varphi)$. Dann existiert ein $T \in GL_n(K)$ mit $\varphi(Tv) = a\varphi(v)$ für alle $v \in K^n$. Nach dem vorigen Theorem stellt φ immer die 1 dar, dass heißt es existiert ein $w \in K^n$ mit $\varphi(w) = 1$. Es folgt $\varphi(Tw) = a\varphi(w) = a \in D_K^*(\varphi)$. □

1.2.3 Der Wittring eines Körpers und sein Fundamentalideal

1.2.17 Beispiel. Wir berechnen den Wittring von $\mathbb{R}$. Es gilt $\mathcal{G}(\mathbb{R}) \cong (\{-1, 1\}, \cdot)$. Also sind bis auf Isometrie die Formen $n \times \langle -1\rangle, \{0\}$ und $n \times \langle 1\rangle$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die einzigen anisotropen quadratischen Formen über $\mathbb{R}$. Es folgt $W(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$. △

In der Theorie der quadratischen Formen über Körpern spielt die Untergruppe der Torsionselemente von $W(K)$ eine wichtige Rolle, zum Beispiel in der Theorie quadratischer Formen über formal reellen Körpern oder für die Definition der u-Invariante. Dabei ist $\{\varphi\} \in W(K)$ ein *Torsionselement*, falls ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \times \{\varphi\} = 0$ existiert, ein Vielfaches von φ also hyperbolisch ist. Wir setzen

$$W_t(K) \;:=\; \{\{\varphi\} \in W(K) \mid \exists\, l \in \mathbb{N} \text{ mit } l \times \varphi \sim \mathbb{H}\}\,.$$

Mit

$$\operatorname{ord}(\{\varphi\}) \;:=\; \left(\min_{l\in\mathbb{N}} \;\middle|\; l \times \{\varphi\} = 0\right)$$

bezeichnen wir die *Ordnung* von $\{\varphi\}$ in $W(K)$, falls $\{\varphi\}$ in $W_t(K)$ liegt. Ist $\{\varphi\}$ kein Torsionselement von $W(K)$, so setzen wir $\operatorname{ord}(\{\varphi\}) = \infty$. Der folgende Satz wird uns eine vollständige Antwort auf die Frage nach möglichen Ordnungen eines Elements von $W(K)$ liefern.

1.2.18 Satz. *Die Torsionsuntergruppe $W_t(K)$ von $W(K)$ ist eine 2-Gruppe, dass heißt jedes Element in $W_t(K)$ hat Ordnung 2^k mit $k \in \mathbb{N}_0$.*

[Pfi95, Theorem 3.4, Seite 30]

Allgemeiner kann man über die Nullteiler im Wittring $W(K)$ die folgende Aussage machen.

1.2.19 Satz. *Sei φ eine nichthyperbolische Form über K, so dass $\{\varphi\} \in W(K)$ ein Nullteiler ist. Dann ist φ geradedimensional.*

[Lor70, 4.5, Seite 36]

Betrachte die surjektive Abbildung

$$e_0 : W(K) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \{\varphi\} \longmapsto \dim(\varphi) \mod 2\mathbb{Z}.$$

Diese ist wohldefiniert und wird *Dimensionsindex* genannt. Es ist $I(K) = \ker(e_0)$ ein Ideal von $W(K)$, dass aus allen Klassen geradedimensionaler Formen besteht. Offensichtlich gilt

$$W(K)/I(K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

1.2.20 Definition. *Das Ideal $I(K)$ heißt* Fundamentalideal *von $W(K)$.*

Betrachten wir die Determinante, so stellen wir fest, dass diese keinen wohldefinierte Abbildung $W(K) \to \mathcal{G}(K)$ definiert. Denn für eine beliebige (reguläre) Form φ über K gilt

$$\det(\varphi) \;\neq\; -\det(\varphi) \;=\; \det(\varphi \perp \mathbb{H}).$$

1.2.21 Definition. *Sei φ eine Form der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ über K. Dann heißt*

$$d(\varphi) \;=\; (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(\varphi)$$

die Diskriminante *von φ.*

Die Abbildung

$$d : W(K) \longrightarrow \mathcal{G}(K), \quad \{\varphi\} \longmapsto d(\varphi),$$

ist nun wohldefiniert. Leider gilt für Formen φ und ψ über K im Allgemeinen nicht $d(\varphi \perp \psi) = d(\varphi)d(\psi)$. Zum Beispiel ist

$$d(\langle 1,1,1\rangle \perp \langle 1\rangle) \;=\; 1 \;\neq\; -1 \;=\; d(\langle 1,1,1\rangle)d(\langle 1\rangle).$$

Die Abbildung $e_1 = d|_{I(K)}$ allerdings ist ein Gruppenhomomorphismus. Denn für geradedimensionale Formen φ gilt $d(\varphi) = (-1)^{\frac{\dim(\varphi)}{2}} \det(\varphi)$, wie man leicht nachrechnet. Ist $\psi \in I(K)$ eine weitere geradedimensionale Form über K, so ist natürlich auch $\varphi \perp \psi$ geradedimensional, weshalb

$$d(\varphi \perp \psi) = (-1)^{\frac{\dim(\varphi)+\dim(\psi)}{2}} \det(\varphi \perp \psi) = (-1)^{\frac{\dim(\varphi)}{2}} \det(\varphi)\, (-1)^{\frac{\dim(\psi)}{2}} \det(\psi) = d(\varphi)d(\psi)$$

gilt. Der Homomorphismus e_1 ist surjektiv, da $d(\langle 1, -a\rangle) = [a]^{\square}$ für alle $a \in K^*$ gilt. Entsprechend folgt

$$I(K)/\ker(e_1) \;\cong\; \mathcal{G}(K).$$

1.2.22 Satz. *Es ist* $\ker(e_1) = I^2(K)$ *das Quadrat des Fundamentalideals $I(K)$.*

[Pfi95, Proposition 3.6, Seite 31]

1.2.23 Beispiel. Zunächst berechnen wir die Determinante einer k-fachen Pfisterform φ mit $k \geq 2$. Es ist $\varphi \cong \langle 1, a\rangle \otimes \psi \cong \psi \perp a\psi$ mit $\dim(\psi) = \frac{\dim(\varphi)}{2}$. Da $\dim(\psi)$ gerade ist, folgt $\det(a\psi) = \det(\psi)$ und somit

$$\det(\varphi) \;=\; \det(\psi)\det(a\psi) \;=\; (\det(\psi))^2 \;=\; 1.$$

Nun wollen wir das Vorzeichen $\frac{n(n-1)}{2}$ der Diskriminante $d(\varphi)$ einer n-dimensionalen Form φ für die Spezialfälle $n = 2^k$ und $n = 2^k - 1$ mit $k \geq 1$ einmal genauer betrachten.

Sei zunächst $n = 2^k$. Dann ist

$$\frac{2^k(2^k-1)}{2} \;=\; \frac{2^{2k} - 2^k}{2} \;=\; 2^{2k-1} - 2^{k-1} \;\equiv\; \begin{cases} 1 \mod 2 & \text{falls } k = 1 \\ 0 \mod 2 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dies bedeutet, dass $d(\varphi) = \det(\varphi)$ für $k \geq 2$ gilt. Ist insbesondere φ ähnlich einer k-fachen Pfisterform mit $k \geq 2$, so folgt $d(\varphi) = 1$. Da $\varphi \in I^2(K)$ liegt, folgt dies auch aus dem obigen Satz.

Sei nun $n = 2^k - 1$ mit $k \geq 1$. Dann gilt

$$\frac{(2^k-1)(2^k-2)}{2} \;=\; 2^{2k-1} - 2^k - 2^{k-1} + 1 \;\equiv\; \begin{cases} 0 \mod 2 & \text{falls } k = 1 \\ 1 \mod 2 & \text{sonst} \end{cases}.$$

In diesem Fall ist also $d(\varphi) = -\det(\varphi)$ für $k \geq 2$. Sei insbesondere φ eine k-fache Pfisterform mit $k \geq 2$. Dann existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \langle 1 \rangle \perp \varphi_p$ und es gilt $d(\varphi_p) = -1$. Die Teilform φ_p wird *reiner Anteil* von φ genannt. In Unterabschnitt 2.2.1 werden wir uns noch eingehender mit den reinen Anteilen von Pfisterformen beschäftigen. △

Allgemeiner interessiert uns für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Potenz $I^n(K)$ des Fundamentalideals.

1.2.24 Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ wird die n-te Potenz $I^n(K)$ des Fundamentalideals additiv von den n-fachen Pfisterformen erzeugt.*

Beweis. Sei $\{\langle a, b \rangle\} \in I(K)$ die Äquivalenzklasse einer beliebigen 2-dimensionalen Form über K. Dann gilt

$$\{\langle a, b \rangle\} \;=\; \{\langle 1, a \rangle\} \ominus \{\langle 1, -b \rangle\}\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung für $n = 1$ und somit für beliebiges n nach der Definition von Pfisterformen. □

1.3 Die Clifford-Invariante

Nach der Diskriminante ist die Clifford-Invariante die für uns wichtigste Invariante quadratischer Formen. Dabei sei erwähnt, dass die Bezeichnung „Clifford-Invariante“ keiner allgemein anerkannten Konvention entspricht. Lam und Scharlau bezeichneten diese Invariante noch als Witt-Invariante. Speziell in der aktuelleren Literatur über generische Zerfällung ist man jedoch zu der Bezeichnung „Clifford-Invariante“ übergegangen.

Ursprünglich wurde die Clifford-Invariante als Gruppenhomomorphismus vom Wittring $W(K)$ in die Brauer-Wall-Gruppe $\mathrm{BW}(K)$ definiert. Diese Gruppe stellt eine Verallgemeinerung der Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$, der wir den ersten Unterabschnitt widmen werden, dar. Während die Brauergruppe aus Äquivalenzklassen von Azumaya-Algebren besteht, sind die Elemente der Brauer-Wall-Gruppe Äquivalenzklassen von graduierten Azumaya-Algebren. Wir wollen hier allerdings nicht den zwar eleganteren aber für unsere Zwecke unnötig aufwendigen Weg über die Brauer-Wall-Gruppe und die Clifford-Algebra gehen. Stattdessen beschäftigen wir uns im zweiten Unterabschnitt intensiv mit Quaternionenalgebren und erarbeiten uns die Mittel, um mit diesen in der Brauergruppe einfach und effektiv rechnen zu können. Im letzten Unterabschnitt definieren wir die Hasse-Invariante, aus der wir mittels leichter Modifikationen unsere Clifford-Invariante erhalten. Wir führen nützliche Rechenregeln für die Clifford-Invariante ein und untersuchen schließlich, inwieweit sie sich zur Charakterisierung quadratischer Formen eignet.

1.3.1 Die Brauergruppe

Zweck dieses Unterabschnitts ist es, eine kurze Einführung zur Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ eines Körpers K zu geben. Wir benötigen diese Grundlagen, da die Clifford-Invariante eines Elements von $W(K)$, deren Konstruktion Ziel dieses Abschnittes ist, ein Element in $\mathrm{Br}(K)$ ist, und da es häufig notwendig sein wird, mit Produkten von Clifford-Invarianten zu rechnen. Mehr als eine grobe Vorstellung von der Struktur der Brauergruppe wird allerdings nicht benötigt, weshalb wir die folgenden Resultate ohne Beweis zitieren. Wichtiger für uns ist die Untergruppe ${}_2\mathrm{Br}(K) \subset \mathrm{Br}(K)$, die von allen Elementen vom Exponenten ≤ 2 erzeugt wird. Diese werden wir im nächsten Unterabschnitt noch genauer behandeln.

Zunächst wiederholen wir ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt. Sei D ein Schiefkörper über K. Dann existieren K-Algebraisomorphismen

$$\begin{aligned} M_n(D) &\cong D \otimes_K M_n(K) \qquad \text{und} \\ M_m(D) \otimes M_n(D) &\cong M_{mn}(D) \end{aligned} \tag{1.8}$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ (siehe [Ker90, Lemma 5.7, Seite 13]).

Sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale K-Algebra. Der *Zentralisator* einer Teilmenge $U \subset A$ ist definiert als

$$C_A(U) := \{x \in A \mid xu = ux \,\forall\, u \in U\}.$$

Im Spezialfall $U = A$ nennen wir $Z(A) := C_A(A)$ das *Zentrum* von A.

1.3.1 Definition. *Sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale K-Algebra.*

(1) Die Algebra A heißt K-zentral *oder auch* zentral*, falls $Z(A) = K$ gilt.*

(2) Wir nennen A einfach*, wenn A keine echten, zweiseitigen Ideale enhält. Das heißt für jedes zweiseitige Ideal $I \subset A$ gilt $I = (0)$ oder $I = A$.*

(3) Eine endlichdimensionale K-Algebra A heißt Azumaya-Algebra*, falls A einfach und K-zentral ist.*

Die Bezeichnung Azumaya-Algebra stammt von Bourbaki (siehe [Bou72, Chap. II, Exercise 14 for §5]). Azumaya hat 1951 in [Azu51] Algebren A über einem lokalen Ringen R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ betrachtet. Dabei war A ein freier endlich erzeugter R-Modul und $A/\mathfrak{m}$ eine zentral einfache $(R/\mathfrak{m})$-Algebra. Damit begründete Azumaya die Theorie der Brauergruppen kommutativer Ringe.

1.3.2 Beispiele. Sei K ein Körper.

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Matrizenring $M_n(K)$ eine Azumaya-Algebra über K (siehe [Pie82, Lemma, Chap. 1.4, Seite 9] und [Ker90, Beispiele 5.5, Kap. I, Seite 13]).

(2) Seien $a, b \in K^*$. Dann ist die *Quaternionenalgebra* $A = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ eine Azumaya-Algebra. Eine Basis von A über K ist gegeben durch Elemente $1, u, v$ und uv, wobei $u^2 = a$, $v^2 = b$ und $uv = -vu$ gilt (siehe [Pie82, Lemma, Chap. 1.6, Seite 14]).

$\triangle$

1.3.3 Satz. (Struktursatz von Wedderburn)
Sei A eine Azumaya-Algebra über K. Dann existiert ein K-zentraler Schiefkörper D und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A \;\cong\; M_n(D) \;\cong\; D \otimes_K M_n(K).$$

Dabei ist n und bis auf Isomorphie auch D eindeutig bestimmt.

[Ker90, Theorem 2.5, Seite 5]

1.3.4 Satz. *Sind A und B Azumaya-Algebren über K, so ist auch $A \otimes_K B$ eine Azumaya-Algebra über K.*

[Ker90, Satz 5.10, Seite 16]

Sei A eine Azumaya-Algebra über K. Wir definieren die zu A *oppositionelle* Azumaya-Algebra A^{op}, indem wir als Menge $A^{op} := A$ setzen. Für $a \in A$ bezeichne a^{op} das entsprechende Element in A^{op}. Die Addition in A^{op} bleibt dieselbe, wie die Addition in A. Nur die Multiplikation in A^{op} sei umgekehrt zu der in A, dass heißt für $a^{op}, b^{op} \in A^{op}$ gelte

$$a^{op} \cdot b^{op} \;:=\; (ba)^{op}.$$

Offensichtlich ist A^{op} ebenfalls eine Azumaya-Algebra.

1.3.5 Lemma. *Für eine Azumaya-Algebra A über K mit $\dim_K(A) = n \in \mathbb{N}$ existiert ein K-Algebraisomorphismus*

$$A \otimes_K A^{op} \;\cong\; \mathrm{End}_K(A) \;\cong\; M_n(K).$$

[Ker90, Satz 6.4, Seite 18]

Nun können wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Azumaya-Algebren über K definieren: Zwei Azumaya-Algebren A, B heißen äquivalent, falls es $m, n \in \mathbb{N}$ und einen K-Algebraisomorphismus

$$A \otimes_K M_m(K) \;\cong\; B \otimes_K M_n(K)$$

gibt. In diesem Fall schreiben wir $A \sim B$ und bezeichnen mit $[A]$ die Äquivalenzklasse von A. Nach dem Struktursatz von Wedderburn existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ und ein (bis auf Isomorphie eindeutiger) zentraler Schiefkörper D über K, so dass $A \cong D \otimes_K M_n(K)$ gilt. Es ist also gerade $[D] = [A]$, und man kann zeigen, dass D bis auf Isomorphie der einzige zentrale Schiefkörper über K mit $D \in [A]$ ist (siehe [Ker90, Bemerkung 6.3, Kap. I, Seite 6]). Für zwei Azumaya-Algebren A, B über K definieren wir das Produkt der zugehörigen Äquivalenzklassen durch

$$[A] \cdot [B] \;:=\; [A \otimes_K B]\,. \tag{1.9}$$

Nach dem Struktursatz von Wedderburn und der Rechenregel (1.8) ist diese Multiplikation wohldefiniert, und man sieht leicht, dass sie kommutativ ist. Das neutrale Element dieser Multiplikation ist die Klasse $[K]$, und es ist $[K] = [M_n(K)]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin besagt Lemma 1.3.5, dass zu $[A]$ die inverse Klasse $[A^{op}]$ existiert.

1.3.6 Theorem. *Die Menge* $\mathrm{Br}(K)$ *aller Äquivalenzklassen von Azumaya-Algebren über* K *ist eine kommutative Gruppe bzgl. der wie in* (1.9) *definierten Multiplikation und wird* Brauergruppe *genannt.*

Ist A eine Azumaya-Algebra über K, so existiert nach dem Struktursatz von Wedderburn 1.3.3 eine Darstellung $A \cong M_n(D)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und einem zentralen Schiefkörper D über K. Bekannt ist, dass $\dim_K(D)$ immer ein Quadrat ist (siehe [Ker90, Korollar 6.6, Seite 19; Abschnitt 15, Seite 41]), weshalb es möglich ist den *Index*

$$\mathrm{ind}_K : \mathrm{Br}(K) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad [A] \longmapsto \left(\sqrt{\dim_K(D)} \;\middle|\; [A] = [D]\,,\, D \text{ Schiefkörper über } K \right),$$

von $[A]$ über K zu definieren.

Abschließend untersuchen wir das Verhalten von Azumaya-Algebren unter Körpererweiterungen. Sei L eine beliebige Körpererweiterung von K und A eine Azumaya-Algebra über K. Es stellt sich nun die Frage, wie sich der Index von $[A \otimes_K L]$ gegenüber dem Index von $[A]$ verhält. Auf diese Frage gibt es eine Reihe von Antworten, die abhängig von der Art der Körpererweiterung L/K sind (siehe zum Beispiel [Pie82, Section 13.4]). Ist L über K rein transzendent, so kann man zeigen, dass $\mathrm{ind}_K([A]) = \mathrm{ind}_L([A \otimes_K L])$ gilt. Für den Fall, dass L eine endliche Erweiterung von K ist, werden wir speziell das folgende Lemma benötigen.

1.3.7 Lemma. *Ist* L *eine endliche Erweiterung von* K *und* A *eine Azumaya-Algebra über* K*, so teilt* $\mathrm{ind}_K([A])$ *das Produkt* $[L : K]\,\mathrm{ind}_L([A \otimes_K L])$.

[Pie82, Proposition (v), Seite 243]

Sei A eine Azumaya-Algebra über einem Körper K. Eine Körpererweiterung L von K heißt *Zerfällungskörper* von A, falls $[A] \otimes L := [A \otimes_K L] = 1$ in $\mathrm{Br}(L)$ gilt. Dass bedeutet, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A \otimes_K L \cong M_n(L)$ gilt. Aus dem letzten Lemma ergibt sich nun das folgende Korollar.

1.3.8 Korollar. *Sei* A *eine Azumaya-Algebra über* K *und* L *ein Zerfällungskörper von* A *mit* $[L : K] < \infty$*. Dann teilt der Index* $\mathrm{ind}_K([A])$ *den Grad* $[L : K]$.

1.3.2 Quaternionenalgebren

Quaternionenalgebren über K haben wir bereits in Beispiel 1.3.2 (2) eingeführt. In diesem Unterabschnitt werden wir solche K-Algebren genauer untersuchen. Sei $A := \left(\frac{a,b}{K}\right)$ mit $a, b \in K^*$ eine Quaternionenalgebra über K. Dann ist durch $1, u, v, uv \in A$ mit $u^2 = a$, $v^2 = b$ und $uv = -vu$ eine Basis von A über K gegeben. Wir bezeichnen diese Basis als *Standardbasis* von A. Somit existiert zu jedem Element $x \in A$ eine eindeutige Darstellung

$$x \;=\; \lambda_1 + \lambda_2 u + \lambda_3 v + \lambda_4 uv, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in K.$$

Das folgende Lemma besagt nun, dass der Unterraum $uK + vK + uvK \subset \left(\frac{a,b}{K}\right)$ unabhängig von der Wahl der Elemente u und v ist. Der Beweis lässt sich leicht nachrechnen.

1.3.9 Lemma. *Für eine Quaternionenalgebra $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ mit Standardbasis $1, u, v, uv$ gilt*

$$uK + vK + uvK \;=\; \left\{ x \in \left(\frac{a,b}{K}\right) \;\middle|\; x^2 \in K,\, x \notin K^* \right\}.$$

[Sch85, Lemma 11.2, Seite 75]

Wir bezeichnen den Unterraum $uK+vK+uvK \subset \left(\frac{a,b}{K}\right)$ mit $\left(\frac{a,b}{K}\right)_0$. Entsprechend existiert eine direkte Zerlegung $\left(\frac{a,b}{K}\right) = 1K \oplus \left(\frac{a,b}{K}\right)_0$, und wir können die *natürliche Involution*

$$- : \left(\frac{a,b}{K}\right) \longrightarrow \left(\frac{a,b}{K}\right), \quad x_0 + x_1 \longmapsto x_0 - x_1, \qquad x_0 \in K,\, x_1 \in \left(\frac{a,b}{K}\right)_0,$$

auf $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ definieren. Man rechnet leicht nach, dass es sich bei

$$N : \left(\frac{a,b}{K}\right) \longrightarrow K, \quad x \longmapsto x\overline{x},$$

um eine quadratische Abbildung handelt, und dass

$$\left(\left(\frac{a,b}{K}\right), N\right) \;\cong\; (K^4, \nu) \qquad \text{mit} \qquad \nu \;=\; \langle 1, -a, -b, ab\rangle \;=\; \langle\langle -a, -b\rangle\rangle \tag{1.10}$$

gilt. Für $x \in \left(\frac{a,b}{K}\right)$ heißt das Element $N(x) \in K$ *Norm* von x. Die quadratische Form ν heißt *Normform* von $\left(\frac{a,b}{K}\right)$. Offensichtlich ist diese Form multiplikativ. Für N gilt insbesondere

$$N(xy) \;=\; xy\overline{y}\,\overline{x} \;=\; x\overline{x}y\overline{y} \;=\; N(x)N(y) \qquad \forall\, x, y \in \left(\frac{a,b}{K}\right),$$

da $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ ist und $y\overline{y} \in K$ mit allen Elementen aus $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ kommutiert.

1.3.10 Lemma. *Eine Quaternionenalgebra $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ ist genau dann ein Schiefkörper, wenn ihre Normform ν anisotrop ist.*

[Sch85, Lemma 11.8, Seite 76]

Beweis. Ist ν anisotrop, so folgt aus (1.10), dass zu jedem $0 \neq x \in \left(\frac{a,b}{K}\right)$ ein Inverses Element existiert. Dieses ist gegeben durch $\overline{x}N(x)^{-1}$. Ist ν isotrop, so enthält $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ Nullteiler. $\square$

Das nächste Theorem wird uns noch häufig von Nutzen sein, da es besagt, dass eine Quaternionenalgebra bereits eindeutig durch ihre Normform bestimmt ist. Der Beweis ist ein wenig technisch aber nicht schwierig, weshalb wir ihn weglassen.

1.3.11 Theorem. *Für $a, b, c, d \in K^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle \;\cong\; \langle\langle -c, -d\rangle\rangle$

(ii) $\langle -a, -b, ab\rangle \;\cong\; \langle -c, -d, cd\rangle$

(iii) $\left(\frac{a,b}{K}\right) \;\cong\; \left(\frac{c,d}{K}\right)$

[Sch85, Theorem 11.9, Seite 76]

Sofort ergibt sich das folgende Korollar, mit dessen Hilfe sich isotrope 3-dimensionale und hyperbolische 4-dimensionale Formen charakterisieren lassen. Insbesondere erhalten wir die Aussage, dass die Normform einer Quaternionenalgebra A genau dann hyperbolisch ist, wenn $[A] = 0$ gilt.

1.3.12 Korollar. *Für $a, b \in K^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Die Form $\langle -a, -b, ab\rangle$ ist isotrop.

(ii) Die Pfisterform $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle$ ist hyperbolisch.

(iii) Es ist $\left(\frac{a,b}{K}\right) \cong \left(\frac{1,1}{K}\right)$.

(iv) Es gilt $\left(\frac{a,b}{K}\right) \cong M_2(K)$.

[Sch85, Corollary 11.10, Seite 77; Corollary 11.14, Seite 78]

Weiterhin ergeben sich die folgenden Rechenregeln für Quaternionenalgebren, die sich leicht mit Hilfe der entsprechenden Normformen überprüfen lassen.

1.3.13 Korollar. *Seien $a, b, c, \alpha, \beta \in K^*$ beliebig. Dann gelten die Aussagen*

(1) $\left(\frac{a,b}{K}\right) \;\cong\; \left(\frac{a\alpha^2, b\beta^2}{K}\right)$,

(2) $\left(\frac{a,b}{K}\right) \;\cong\; \left(\frac{b,a}{K}\right)$,

(3) $M_2(K) \;\cong\; \left(\frac{1,1}{K}\right) \;\cong\; \left(\frac{1,a}{K}\right) \;\cong\; \left(\frac{b,-b}{K}\right) \;\cong\; \left(\frac{c,1-c}{K}\right), \quad c \neq 0, 1,$ *und*

(4) $\left(\frac{a,a}{K}\right) \;\cong\; \left(\frac{a,-1}{K}\right)$.

[Sch85, Corollary 11.13, Seite 78]

Aussage (1) des vorherigen Korollars besagt, dass die Isometrieklasse einer Quaternionenalgebra $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ bereits durch die Quadratklassen $[a]^{\square}, [b]^{\square} \in \mathcal{G}(K)$ eindeutig bestimmt ist. Sind $\alpha, \beta \in \mathcal{G}(K)$, so wollen wir zukünftig auch die Notation $\left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$ erlauben.

Schließlich benötigen wir noch die Eigenschaft von Quaternionenalgebren, sich in $\mathrm{Br}(K)$ bimultiplikativ zu verhalten.

1.3.14 Lemma. *Für $a, b, c \in K^*$ gilt*

$$\left[\left(\frac{ab, c}{K}\right)\right] = \left[\left(\frac{a, c}{K}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{b, c}{K}\right)\right] \quad \text{und} \quad \left[\left(\frac{a, bc}{K}\right)\right] = \left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{a, c}{K}\right)\right].$$

[Sch85, Lemma 13.1, Seite 85]

Betrachte die Untergruppe $\mathrm{Quat}(K) \subset \mathrm{Br}(K)$, welche von den Äquivalenzklassen aller Quaternionenalgebren über K erzeugt wird. Dann folgt für $[(\frac{a,b}{K})] \in \mathrm{Quat}(K)$ aus dem vorherigen Lemma und Korollar 1.3.13

$$\left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right]^2 = \left[\left(\frac{a^2, b}{K}\right)\right] = \left[\left(\frac{1, b}{K}\right)\right] = 1.$$

Dies bedeutet, dass jedes Element aus $\mathrm{Quat}(K) \setminus \{1\}$ vom Exponenten 2 ist. Folglich gilt $\mathrm{Quat}(K) \subset {}_2\mathrm{Br}(K)$, wobei

$${}_2\mathrm{Br}(K) := \left\{[A] \in \mathrm{Br}(K) \;\middle|\; [A]^2 = 1\right\}$$

sei.

Hat $[A] \in \mathrm{Br}(K)$ nun den Exponenten n, so teilt n den Index $\mathrm{ind}_K([A])$. Ist umgekehrt p eine Primzahl, die $\mathrm{ind}_K([A])$ teilt, so teilt p auch n ([Ker90, Korollar 15.2, Seite 43, und der folgende Absatz]). Liegt insbesondere $[A] \in {}_2\mathrm{Br}(K)$, so folgt $\mathrm{ind}_K([A]) = 2^r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$.

1.3.3 Die Clifford-Invariante

Zunächst definieren wir die Hasse-Invariante. Diese ist zwar invariant unter Isometrie aber nicht unter Äquivalenz von quadratischen Formen. Durch eine leichte Modifikation, die ein wenig künstlich erscheinen mag, erhalten wir aus der Hasse-Invariante die Clifford-Invariante, welche wiederum auch invariant unter Äquivalenz von Formen ist. Um die Wohldefiniertheit der Hasse-Invariante zeigen zu können, benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

1.3.15 Lemma. *Seien φ und ψ zwei isometrische Formen über K mit Diagonalgestalt. Dann existiert eine Kette $\varphi_0, \ldots, \varphi_s$ von Formen über K mit Diagonalgestalt so, dass*

$$\varphi = \varphi_0 \cong \varphi_1 \cong \ldots \cong \varphi_s = \psi$$

gilt, wobei φ_i und φ_{i-1} sich für $i = 1, \ldots, s$ jeweils nur durch zwei Einträge unterscheiden.

[Sch85, Lemma 9.2, Seite 64]

1.3.16 Definition. *Sei $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ eine Form über K. Ist $n > 1$, so heißt*

$$s(\varphi) := \prod_{1 \le i < j \le n} \left[\left(\frac{a_i, a_j}{K}\right)\right] \in \mathrm{Br}(K)$$

Hasse-Invariante *von φ. Für $n \le 1$ setzen wir $s(\varphi) := 1$.*

Damit die Hasse-Invariante $s(\varphi)$ wohldefiniert ist, muss sie unabhängig von der gewählten Diagonalisierung von φ sein. Sei $\varphi \cong \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ eine weitere Diagonalisierung von φ. Nach Lemma 1.3.15 können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle =$

$\langle b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n\rangle$ gilt. Witt's Kürzungssatz 1.1.17 liefert $\langle a_1, a_2\rangle \cong \langle b_1, b_2\rangle$. Wir erhalten $\langle\langle -a_1, -a_2\rangle\rangle \cong \langle\langle -b_1, -b_2\rangle\rangle$, und aus Theorem 1.3.11 folgt $\left(\frac{a_1,a_2}{K}\right) \cong \left(\frac{b_1,b_2}{K}\right)$. Somit gilt wegen $\det(\langle a_1, a_2\rangle) = \det(\langle b_1, b_2\rangle)$

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{1\le i<j\le n}{}_K \left(\frac{a_i, a_j}{K}\right) &\cong \left(\frac{a_1, a_2}{K}\right) \otimes_K \bigotimes_{j=3,\ldots,n}{}_K \left(\frac{a_1 a_2, a_j}{K}\right) \otimes_K \bigotimes_{3\le i<j\le n}{}_K \left(\frac{a_i, a_j}{K}\right)\\
&\cong \left(\frac{b_1, b_2}{K}\right) \otimes_K \bigotimes_{j=3,\ldots,n}{}_K \left(\frac{b_1 b_2, a_j}{K}\right) \otimes_K \bigotimes_{3\le i<j\le n}{}_K \left(\frac{a_i, a_j}{K}\right)\\
&\cong \bigotimes_{1\le i<j\le n}{}_K \left(\frac{b_i, b_j}{K}\right).
\end{aligned}$$

Folglich ist die Hasse-Invariante wohldefiniert. Durch eine ähnliche Rechnung erhalten wir die folgende Aussage.

1.3.17 Lemma. *Für Formen φ und ψ über K gilt*

$$s(\varphi \perp \psi) \;\cong\; s(\varphi)\cdot s(\psi)\cdot \left[\left(\frac{\det(\varphi), \det(\psi)}{K}\right)\right].$$

[Sch85, Lemma 12.6, Seite 80]

1.3.18 Lemma. *Für eine Form φ über K und $b \in K^*$ gilt*

$$s(b\varphi) \;=\; \begin{cases} s(\varphi)\cdot\left[\left(\frac{b,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{K}\right)\right] & \textit{für } \dim(\varphi) \textit{ ungerade,}\\ s(\varphi)\cdot\left[\left(\frac{b,d(\varphi)}{K}\right)\right] & \textit{für } \dim(\varphi) \textit{ gerade.}\end{cases}$$

Beweis. Sei $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ und $n = \dim(\varphi)$ zunächst beliebig. Den trivialen Fall $n \le 1$ schließen wir aus. Dann gilt nach Korollar 1.3.13 und Lemma 1.3.7

$$\begin{aligned}
s(b\varphi) &= \prod_{1\le i<j\le n}\left(\left[\left(\frac{b,b}{K}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{b,a_i}{K}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{b,a_j}{K}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{a_i,a_j}{K}\right)\right]\right)\\
&= \left[\left(\frac{b,-1}{K}\right)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{b,a_i}{K}\right)\right]^{n-1}\right)\cdot s(\varphi).
\end{aligned}$$

Ist n ungerade, so folgt hieraus

$$s(b\varphi) \;=\; \left[\left(\frac{b,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{K}\right)\right]\cdot s(\varphi),$$

da alle Elemente aus $\mathrm{Quat}(K)$ vom Exponenten 2 sind. Ist n gerade, so erhalten wir

$$s(b\varphi) \;=\; \left[\left(\frac{b,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{K}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{b,\det(\varphi)}{K}\right)\right]\cdot s(\varphi),$$

und aus der Bimultiplikativität der Elemente von $\mathrm{Quat}(K)$ und der Definition der Diskriminante folgt auch in diesem Fall die Behauptung. $\square$

Wie wir gezeigt haben, ist die Hasse-Invariante wohldefiniert, und dies bedeutet gleichzeitig, dass sie invariant unter Isometrie ist. Doch man findet leicht Beispiele dafür, dass äquivalente Formen im Allgemeinen nicht die gleiche Hasse-Invariante besitzen. Wir wollen nun an der Hasse-Invariante leichte Modifikationen vornehmen, so dass eine Invariante entsteht, die verträglich mit der Äquivalenz quadratischer Formen ist. Dies ist die Clifford-Invariante[3].

1.3.19 Definition. *Für φ über K und $n = \dim(\varphi)$ definieren wir*

$$c(\varphi) \;:=\; \begin{cases} s(\varphi) & \textit{für } n \equiv 1,2 \pmod 8, \\ s(\varphi)\cdot\left[\left(\frac{-1,-\det(\varphi)}{K}\right)\right] & \textit{für } n \equiv 3,4 \pmod 8, \\ s(\varphi)\cdot\left[\left(\frac{-1,-1}{K}\right)\right] & \textit{für } n \equiv 5,6 \pmod 8, \\ s(\varphi)\cdot\left[\left(\frac{-1,\det(\varphi)}{K}\right)\right] & \textit{für } n \equiv 7,8 \pmod 8, \end{cases}$$

und nennen $c(\varphi)$ die Clifford-Invariante *von φ.*

Leicht sieht man, dass die Clifford-Invariante einer Form wohldefiniert ist, da dies auch für die Hasse Invariante und die Determinante einer Form gilt.

1.3.20 Beispiele. Seien $a, b \in K^*$.

(1) Für $\varphi \cong \langle a, b\rangle$ mit $a, b \in K^*$ ist per Definition $c(\varphi) = s(\varphi)$ und somit $c(\varphi) = [\left(\frac{a,b}{K}\right)]$.

(2) Sei $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle$. Dann ist $c(\varphi) = s(\varphi)\cdot[\left(\frac{-1,-1}{K}\right)]$ und $s(\varphi) = [\left(\frac{a,b}{K}\right)]\cdot[\left(\frac{-1,ab}{K}\right)]$. Mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Rechenregeln für Quaternionenalgebren erhalten wir

$$c(\varphi) \;=\; \left[\left(\frac{a,b}{K}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{-1,-ab}{K}\right)\right] \;=\; \left[\left(\frac{-a,-b}{K}\right)\right].$$

Also ist $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ gerade die Normform des Represäntanten $\left(\frac{-a,-b}{K}\right)$ der Clifford-Invariante $c(\langle\langle a, b\rangle\rangle)$.

(3) Sei φ eine 4-dimensionale Form über K mit $d(\varphi) = 1$. Dann existiert eine Darstellung $\varphi \cong \langle a, b, c, abc\rangle \cong a\langle\langle ab, ac\rangle\rangle$, und es gilt $c(\varphi) = c(\langle\langle ab, ac\rangle\rangle)\cdot[\left(\frac{a,1}{K}\right)] = [\left(\frac{-ab,-ac}{K}\right)]$.

△

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Rechenregeln für die Clifford-Invariante, die analog zu den Lemmata 1.3.17 und 1.3.18 sind. Der Beweis des folgenden Resultats besteht nur darin, die einzelnen möglichen Fälle direkt nachzurechnen, weshalb wir ihn hier auslassen.

1.3.21 Satz. *Seien φ und ψ Formen über K.*

(1) Sind $\dim(\varphi)$ und $\dim(\psi)$ beide gerade oder ungerade, so gilt

$$c(\varphi\perp\psi) \;=\; c(\varphi)\cdot c(\psi)\cdot\left[\left(\frac{d(\varphi), d(\psi)}{K}\right)\right].$$

[3] In [Lam73] und [Sch85] wird diese Invariante noch „Witt-Invariante“ genannt. In aktuelleren Artikeln, die sich speziell mit der generischen Zerfällung quadratischer Formen beschäftigen, ist man zu der Bezeichnung „Clifford-Invariante“ übergegangen (siehe zum Beispiel [Hof95b]). Doch Scharlau weist in seinem Buch bereits darauf hin, dass es keine allgemein anerkannte Konvention für die Bezeichnung dieser Invarianten gibt.

(2) Ist $\dim(\varphi)$ *ungerade und* $\dim(\psi)$ *gerade, so gilt*

$$c(\varphi\perp\psi) \;=\; c(\varphi)\cdot c(\psi)\cdot\left[\left(\frac{-d(\varphi),d(\psi)}{K}\right)\right].$$

[Lam73, 3.13, Seite 121]

1.3.22 Satz. *Sei* φ *eine Form über* K *und* $a \in K^*$.

(1) Ist $\dim(\varphi)$ *ungerade, so ist* $c(a\varphi) = c(\varphi)$.

(2) Ist $\dim(\varphi)$ *gerade, so gilt*

$$c(a\varphi) \;=\; c(\varphi)\cdot\left[\left(\frac{a,d(\varphi)}{K}\right)\right].$$

Beweis. (1): Für $n \equiv 1,5 \pmod 8$ ist nichts zu zeigen, da in diesem Fall nach Lemma 1.3.18 $s(a\varphi) = s(\varphi)$ gilt. Ist $n \equiv 3 \pmod 8$, so erhalten wir

$$c(a\varphi) \;=\; s(a\varphi)\cdot\left[\left(\frac{-1,-a\det(\varphi)}{K}\right)\right] \;=\; s(\varphi)\cdot\left[\left(\frac{-1,a}{K}\right)\right]^2\cdot\left[\left(\frac{-1,-\det(\varphi)}{K}\right)\right] \;=\; c(\varphi).$$

Der Fall $n \equiv 7 \pmod 8$ lässt sich vollkommen analog zeigen.

(2): In diesem Fall gilt $\det(a\varphi) = \det(\varphi)$, und somit folgt die Behauptung direkt aus Lemma 1.3.18 und der Definition der Clifford-Invariante. □

Aus den beiden vorherigen Sätzen lässt sich das folgende Korollar herleiten.

1.3.23 Korollar. *Seien* φ *und* ψ *Formen über* K.

(1) Sind $\dim(\varphi)$ *und* $\dim(\psi)$ *gerade, so gilt*

$$c(\varphi\perp\psi) \;=\; c(\varphi)\cdot c(d(\varphi)\psi).$$

(2) Ist $\dim(\varphi)$ *ungerade und* $\dim(\psi)$ *gerade, so gilt*

$$c(\varphi\perp\psi) \;=\; c(\varphi)\cdot c(-d(\varphi)\psi).$$

[Lam73, (3.15), Seite 121]

Nun stehen uns die Mittel zur Verfügung, um zu zeigen, dass die Clifford-Invariante im Gegensatz zur Hasse-Invariante unabhängig von der Wahl eines Repräsentaten der Äquivalenzklasse einer Form ist.

1.3.24 Lemma. *Für eine Form* φ *über* K *hängt die Clifford-Invariante* $c(\varphi)$ *nur von der Äquivalenzklasse von* φ *ab.*

Beweis. Nach Korollar 1.3.23 gilt

$$c(\varphi\perp\mathbb{H}) \;=\; c(\varphi)\cdot c((-1)^{\dim(\varphi)}\mathbb{H}) \;=\; c(\varphi).$$

□

Mit Hilfe von Satz 1.3.21 sieht man leicht, dass die Clifford-Invariante kein Gruppenhomomorphismus $W(K) \to \mathrm{Br}(K)$ ist. Sind jedoch φ und ψ Formen mit Klassen in $I^2(K)$, so gilt nach Korollar 1.3.23 und Satz 1.2.22

$$c(\varphi \perp \psi) \;=\; c(\varphi) \cdot c(d(\varphi)\psi) \;=\; c(\varphi) \cdot c(\psi).$$

Weiterhin ist die Clifford-Invariante nach Lemma 1.3.24 als Abbildung $W(K) \to \mathrm{Br}(K)$ wohldefiniert. Also ist

$$\gamma : I^2(K) \longrightarrow {}_2\mathrm{Br}(K), \quad \{\varphi\} \longmapsto c(\varphi),$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.

1.3.25 Proposition. *Es ist $I^3(K) \subset \ker(\gamma)$, dass heißt, es gilt $\gamma(\{\varphi\}) = 1$ für alle $\{\varphi\} \in I^3(K)$.*

Beweis. Da $I^3(K)$ additiv von 3-fachen Pfisterformen erzeugt wird und γ ein Homomorphismus ist, genügt es $c(\tau)$ für eine 3-fache Pfisterform $\tau \cong \langle\langle a, b, c\rangle\rangle$ zu berechnen. In diesem Fall gilt nach Korollar 1.3.22

$$\gamma(\{\tau\}) \;=\; c(\tau) \;=\; c(\langle\langle b, c\rangle\rangle) \cdot c(a\langle\langle b, c\rangle\rangle) \;=\; \left[\left(\frac{-b, -c}{K}\right)\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{a, 1}{K}\right)\right] \;=\; 1.$$

□

Alexander S. Merkurjev hat in [Mer81a] die bereits seit langem vermutete Aussage bewiesen, dass γ sogar einen Isomorphismus

$$I^2(K)/I^3(K) \xrightarrow{\;\cong\;} {}_2\mathrm{Br}(K) \tag{1.11}$$

induziert. Da $\gamma(I^2(K)) \subset \mathrm{Quat}(K)$ liegt, folgt hieraus insbesondere $\mathrm{Quat}(K) = {}_2\mathrm{Br}(K)$.

1.3.26 Theorem. (Satz von Merkurjev)
Für jeden Körper K gilt $I^3(K) = \ker(\gamma)$.

[Mer81a]

Zum Abschluss untersuchen wir, inwieweit sich die Clifford-Invariante zur Klassifikation von quadratischen Formen eignet. Die Antwort hierauf ist leider recht unbefriedigend, denn tatsächlich ist für beliebige Körper und beliebige Formen bisher nur folgendes bekannt:

1.3.27 Proposition. *Seien φ und ψ Formen der Dimension $n \leq 3$ über K. Dann sind φ und ψ genau dann isometrisch, wenn $d(\varphi) = d(\psi)$ und $c(\varphi) = c(\psi)$ gilt.*

[Lam73, Theorem 3.21, Seite 124]

Über den Fall 4-dimensionaler Formen können wir immerhin die folgende Aussage machen.

1.3.28 Proposition. *Seien τ und σ zwei 2-fache Pfisterformen über K. Dann gilt genau dann $c(\tau) = c(\sigma)$, wenn τ und σ isometrisch sind. Insbesondere ist τ genau dann hyperbolisch, wenn $c(\tau) = 1$ gilt.*

Beweis. Wir hatten gesehen, dass $c(\langle\langle a, b\rangle\rangle) = [\left(\frac{-a,-b}{K}\right)]$ gilt. Entsprechend folgt aus Theorem 1.3.11 und Korollar 1.3.12 die Behauptung. □

1.4 Diskret bewertete Körper

Diskret bewertete Körper, welche wir im ersten Unterabschnitt einführen werden, spielen in der Theorie der quadratischen Formen eine erhebliche Rolle. Dabei ordnet eine diskrete Bewertung v von K jedem Element aus K eine ganze Zahl oder ein Symbol ∞ zu. Die Menge aller Elemente $x \in K$ mit $v(x) \geq 0$ bilden einen lokalen Ring $\mathcal{O}$, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ aus den Elementen $x \in K$ mit $v(x) > 0$ besteht. Wir werden sehen, dass es unter bestimmten Voraussetzungen möglich ist, jeder quadratischen Form über K eindeutig zwei Formen über dem Restklassenkörper $\kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ zuzuordnen. Diese Formen nennen wir erste und zweite Restklassenform.

Im zweiten Unterabschnitt betrachten wir zunächst diskret bewertete, vollständige Körper und konstruieren zu einem beliebigen diskret bewerteten Körper eine bis auf Isomorphie eindeutige Vervollständigung. Wir definieren 2-henselsche Körper und stellen fest, dass jeder diskret bewertete Körper auch 2-henselsch ist. Diese spezielle Klasse von Körpern ist insofern besonders interessant, als dass für diese der Satz von Springer greift, der es ermöglicht Isotropie und Isometrie quadratischer Formen mit Hilfe ihrer Restklassenformen zu untersuchen. Besonders nützlich ist dies, wenn man niedrigdimensionale Formen betrachtet (siehe zum Beispiel [HG95] oder [HLG95]). Abschließend beschreiben wir ein Verfahren, mit dem man zu einem beliebigen Körper K einen diskret bewerteten, vollständigen Körper erhält, so dass es möglich wird Formen über K mit Hilfe des Satzes von Springer zu untersuchen.

1.4.1 Diskrete Bewertungen

1.4.1 Definition. *Sei K ein Körper. Eine* diskrete Bewertung *von K ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $v : K^* \to \mathbb{Z}$, der*

$$v(x+y) \;\geq\; \min\{v(x), v(y)\} \tag{1.12}$$

für alle $x, y \in K^*$ mit $x \neq -y$ erfüllt. Der Körper K heißt dann diskret bewertet. *Wir setzen v auf ganz K fort, indem wir $v(0) := \infty$ setzen.*

Sei K ein Körper mit diskreter Bewertung v. Dann ist

$$\mathcal{O} \;:=\; \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$

ein Ring, da $v(xy) = v(x) + v(y) \geq 0$ und nach Ungleichung (1.12) $v(x+y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathcal{O}$ gilt. Ebenso sieht man leicht, dass

$$\mathfrak{m} \;:=\; \{x \in K \mid v(x) > 0\}$$

ein Ideal in $\mathcal{O}$ ist. Sei $x \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$. Dann existiert ein $y \in K^*$ mit $xy = 1$. Es folgt $v(x) + v(y) = v(1) = 0$ und weiter $v(y) = -v(x) = 0$. Also ist jedes Element von $x \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$ in $\mathcal{O}$ invertierbar. Da $\mathfrak{m}$ ein Ideal ist, folgt

$$\mathcal{O}^* \;=\; \{x \in K^* \mid v(x) = 0\} \;=\; \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}.$$

Nach Lemma 1.1.1 ist $\mathcal{O}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.

Da v surjektiv ist, existiert ein $\pi \in \mathcal{O}$ mit $v(\pi) = 1$. Betrachte zu $x \in K^*$ das Element $u = x\pi^{-v(x)}$. Es ist $x = \pi^{v(x)}u$, und es gilt

$$v(u) \;=\; v(x) + v(\pi^{-v(x)}) \;=\; v(x) - v(x) \;=\; 0.$$

Das bedeutet, dass es bei fest gewähltem $\pi \in \mathcal{O}$ zu jedem $x \in K^*$ eine Darstellung $x = \pi^{v(x)}u$ mit einem eindeutig bestimmten $u \in \mathcal{O}^*$ gibt. Hieraus folgt sofort, dass $\mathfrak{m} = (\pi)$ ein Hauptideal ist.

1.4.2 Definition. *Sei $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung von K. Der wie oben definierte lokale Ring $\mathcal{O}$ heißt* Bewertungsring *von K bzgl v. Den Körper $\kappa := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ nennen wir* Restklassenkörper *von K bzgl. v. Jedes Element $\pi \in \mathfrak{m}$ mit $v(\pi) = 1$ heißt* Primelement *bzgl. der Bewertung v.*

Es sei kurz an die natürliche Projektion

$$\mathcal{O} \longrightarrow \kappa, \quad a \longmapsto a + \mathfrak{m},$$

erinnert. Das Bild eines Element $a \in \mathcal{O}$ bezeichnen wir mit $\overline{a}$.

Sei φ eine beliebige (reguläre) Form über einem diskret bewerteten Körper K mit Bewertung v, und sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring bzgl. v, π ein Primelement und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$. Gilt $\varphi \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ mit $a_1, \dots, a_n \in K^*$, so existiert für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Darstellung $a_i = \pi^{v(a_i)}u_i$ mit $u_i \in \mathcal{O}^*$. Sei $k := \min\{v(a_i), \dots, v(a_n)\}$. Ist k ungerade, so setze $l := -k + 1$, andernfalls sei $l := -k$. Auf jeden Fall ist l gerade und π^l ein Quadrat in K, weshalb $\varphi \cong \pi^l\varphi$ gilt. Für $i = 1, \dots, n$ folgt nun

$$v(a_i\pi^l) \;=\; v(a_i) + l \;\geq\; v(a_i) - k \;\geq\; 0.$$

Also liegen alle Diagonaleinträge von $\pi^l\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ in $\mathcal{O}$. Indem wir nun Quadrate streichen und die Reihenfolge der Elemente angemessen abändern, erhalten wir eine Darstellung

$$\varphi \;\cong\; \langle b_1, \dots, b_m \rangle \perp \pi \langle b_{m+1}, \dots, b_n \rangle \tag{1.13}$$

mit $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{O}^*$. Ist κ der Restklassenkörper von K bzgl. v, so können wir der Form φ die zwei Formen

$$\partial_1(\varphi) := \langle \overline{b_1}, \dots, \overline{b_m} \rangle \qquad \text{und} \qquad \partial_2(\varphi) := \langle \overline{b_{b+1}}, \dots, \overline{b_n} \rangle$$

über κ zuordnen. Die Formen $\partial_1(\varphi)$ und $\partial_2(\varphi)$ sind bis auf Isometrie unabhängig von der gewählten Diagonalisierung von φ und somit wohldefiniert, sobald ein festes Primelement π gewählt wurde (siehe [Sch85, Chap. 6.2]). Da alle $b_i \in \mathcal{O}^*$ liegen, sind die Formen $\partial_1(\varphi)$ und $\partial_2(\varphi)$ regulär.

1.4.3 Definition. *Zu einer Form φ über K nennen wir die Formen $\partial_1(\varphi)$ und $\partial_2(\varphi)$ über κ jeweils* erste *bzw.* zweite Restklassenform *von φ.*

1.4.2 Diskret bewertete, vollständige Körper

1.4.4 Definition. *Sei K ein diskret bewerteter Körper mit Bewertung v.*

(1) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ heißt Cauchyfolge*, falls es zu jedem $z \in \mathbb{Z}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $v(a_n - a_m) > z$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt.*

(2) *Wir sagen, dass eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ konvergiert, *falls es ein* $a \in K$ *gibt, so dass zu jedem* $z \in \mathbb{Z}$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $v(a_n - a) > z$ *für alle* $n \geq n_0$ *existiert. In diesem Fall sagen wir auch, dass* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert *und schreiben* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(3) *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* Nullfolge, *falls sie gegen* 0 *konvergiert.*

(4) *Der Körper* K *heißt* vollständig, *falls in* K *jede Cauchyfolge konvergiert.*

(5) *Eine Teilmenge* $U \subset K$ *heißt* dicht, *falls es zu jedem Element* $b \in K$ *eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ *gibt.*

(6) *Eine Körpererweiterung* $\overline{K}$ *von* K *heißt* Vervollständigung *von* K, *falls eine diskrete Bewertung* $\overline{v}$ *von* $\overline{K}$ *existiert, die* v *fortsetzt, so dass* $\overline{K}$ *bzgl.* $\overline{v}$ *vollständig ist.*

Sei $\mathscr{C}$ die Menge aller Cauchyfolgen und $\mathscr{N}$ die Menge aller Nullfolgen in K. Dann ist $\mathscr{C}$ ein Ring via gliedweiser Addition und Multiplikation. Das heißt, für zwei Folgen $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathfrak{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{C}$ ist die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und das Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ jeweils durch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Entsprechend ist $\mathscr{N}$ ein Ideal in $\mathscr{C}$.

1.4.5 Satz. *Es ist* $\overline{K} := \mathscr{C}/\mathscr{N}$ *ein vollständiger Körper, der einen zu* K *isomorphen Teilkörper enthält. Fassen wir* K *als Teilkörper von* $\overline{K}$ *auf, so ist* $\overline{K}$ *eine Vervollständigung von* K.

[Jac64, Theorem 5, Seite 219]

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit 2-henselschen Körpern. Diese Klasse von Körpern ist insofern von besonderer Bedeutung für die algebraische Theorie quadratischer Formen, als dass genau auf Formen über solchen Körpern der Satz von Springer angewendet werden kann.

1.4.6 Definition. *Ein diskret bewerteter Körper* K *mit Bewertung* v, *Bewertungsring* $\mathcal{O}$ *und Restklassenkörper* κ *heißt* 2-henselsch, *falls für* $a \in \mathcal{O}^*$

$$\overline{a} \in \kappa \text{ ist Quadrat} \quad \Longrightarrow \quad a \in \mathcal{O}^* \text{ ist Quadrat}$$

gilt (vergleiche [Sch85, Seite 208]).

Dies ist eine der elementarsten Definitionen des Begriffes „2-henselsch“. Eine ursprünglichere Definition findet sich zum Beispiel in [Wad83, Seite 474]. Weitere zu Definition 1.4.6 äquivalente Formulierungen findet man unter anderem in [Koe95]. Insbesondere sei auf die Charakterisierungen von 2-henselschen Körpern mit Hilfe von quadratischen Formen in [Mor90] hingewiesen.

1.4.7 Satz. *Jeder diskret bewertete, vollständige Körper* K *ist* 2*-henselsch.*

[Sch85, Fact 2.3, Chap. 6, Seite 208]

Tonny A. Springer hat das nachfolgende Resultat zuerst in [Spr55, Proposition 3, Seite 358] nur für anisotrope Formen bewiesen, die er definit nannte. Wir zitieren hier eine allgemeinere Version dieser Proposition für 2-henselsche Körper.

1.4.8 Theorem. (Satz von Springer)
Sei K *ein* 2*-henselscher Körper mit Restklassenkörper* κ. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Eine Form φ über K ist genau dann isotrop, wenn mindestens eine der Formen $\partial_1(\varphi)$ oder $\partial_2(\varphi)$ isotrop ist.

(2) Zwei Formen φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn $\partial_i(\varphi)$ und $\partial_i(\psi)$ für $i = 1, 2$ äquivalent sind.

(3) Es existiert ein Gruppenisomorphismus

$$(\partial_1, \partial_2) : W(K) \longrightarrow W(\kappa) \oplus W(\kappa).$$

(4) Ist jede n-dimensionale Form über κ isotrop, so ist jede $(2n-1)$-dimensionale Form über K isotrop.

[Sch85, Corollary 2.6, Seite 209]

Die Aussagen (3) und (4) sind im wesentlichen direkte Folgerungen aus den Punkten (1) und (2). Allgemeiner folgt für einen diskret bewerteten, vollständigen Körper K mit Restklassenkörper κ, dass die Abbildungen ∂_1 und ∂_2 die zwei wohldefinierten Abbildungen

$$\partial_1 : W(K) \longrightarrow W(\kappa) \qquad \text{und} \qquad \partial_2 : W(K) \longrightarrow W(\kappa)$$

definieren.

Wir wollen uns nun näher mit einer speziellen Klasse von diskret bewerteten Körpern beschäftigen. Betrachte den rationalen Funktionenkörper

$$L := K(X) \;=\; \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in K[X],\ g \neq 0 \right\}$$

in einer Unbestimmten über einem beliebigen Körper K (mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$). Sei $p \in K[X]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom. Da $K[X]$ faktoriell ist (siehe [Bos03, Korollar 3, Seite 61]), lässt sich jedes Element $0 \neq f \in K[X]$ eindeutig darstellen als $f = p^{v(f)}u$ mit $v(f) \in \mathbb{N}_0$ und $u \in K[X] \setminus (p)$. Dann ist

$$v : L^* \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \frac{f}{g} \longmapsto v(f) - v(g),$$

eine diskrete Bewertung von L. Wieder setzen wir $v(0) = \infty$. Offensichtlich ist p ein Primelement bzgl. v. Sei nun

$$\mathcal{O} \;=\; \left\{ \frac{f}{g} \in L \;\middle|\; p \nmid g \right\} \;=\; K[X]_{(p)}$$

die Lokalisierung von $K[X]$ nach dem Primideal (p). Man rechnet leicht nach, dass $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von L bzgl. v ist. Sei κ der Restklassenkörper von L bzgl. v. Dann kann man zeigen, dass

$$\kappa \;=\; \mathcal{O}/p\mathcal{O} \;\cong\; K[X]/(p)$$

gilt. Entsprechend lässt sich κ als Körpererweiterung von K auffassen.

Mit L_p bezeichnen wir die Vervollständigung von L gemäß Satz 1.4.5. Ist κ_p der Restklassenkörper von L_p bzgl. der Fortsetzung von v auf L_p, so gilt $\kappa_p \cong \kappa \cong K[X]/(p)$ (siehe zum Beispiel [Lor97, F7, Seite 66]).

Schließlich sei $\varphi \cong \langle a_1, \dots, a_m, pa_{m+1}, \dots, pa_n \rangle$ die Darstellung einer Form φ über L wie in (1.13). Wir definieren für $i = 1, 2$ die Abbildungen

$$\partial_i^{(p)} : W(L) \longrightarrow W(L_p) \xrightarrow{\partial_i} W(\kappa_p)$$

als Verkettung von ∂_i mit der natürlichen Inklusion.

Abschließend zitieren wir ein Theorem, das wir speziell für den Beweis von Theorem 4.1.10 in Unterabschnitt 4.1.2 benötigen werden.

1.4.9 Theorem. *Sei $f = ap_1 \dots p_r \in K[X]$ mit $a \in K^*$ und normierten, irreduziblen Polynomen $p_i \in K[X]$, $L = K(X)$ und φ eine Form über K. Dann liegt $f \in G_L(\varphi_L)$ genau dann, wenn $a \in G_K(\varphi_K)$ und $\varphi \otimes \kappa_{p_i} \sim 0$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ gilt.*

[Lam73, Theorem 3.4, Chapter IX, Seite 268]

Kapitel 2

Generische Zerfällung

2.1 Spezialisierung und Funktionenkörper

Dieser Abschnitt dient dazu, die Grundlagen für die Theorie der generischen Zerfällung quadratischer Formen zu schaffen. Im ersten Unterabschnitt behandeln wir zunächst ein Thema aus der Bewertungstheorie. Wir führen Stellen und den Bewertungsring einer solchen ein. Die Parallelen zum Abschnitt 1.4 sind insofern kein Zufall, als dass Stellen ebenfalls Bewertungen sind. Wir erarbeiten uns ein Kriterium für die Existenz von Stellen und beweisen mit diesem einige Fortsetzungsresultate, die wir im Laufe dieser Arbeit benötigen werden.

Im zweiten Unterabschnitt definieren wir den Funktionenkörper einer quadratischen Form. Wir zeigen, dass eine nichthyperbolische, mindestens 2-dimensionale Form φ betrachtet als Polynom immer irreduzibel ist, wodurch die Definition des Funktionenkörpers $K(\varphi)$ überhaupt erst möglich wird. Schließlich reduzieren wir den Transzendenzgrad von $K(\varphi)$ um eins und erhalten so den kleinen Funktionenkörper $K(\varphi)_s$ von φ. Die Eigenschaften von $K(\varphi)$ und $K(\varphi)_s$ untersuchen wir dann im nächsten Unterabschnitt. Wir zeigen, dass der Funktionenkörper zwar invariant unter Ähnlichkeit und Isometrie ist, jedoch nicht unter Äquivalenz quadratischer Formen. Abschließend untersuchen wir die Struktur der Körpererweiterungen $K(\varphi)/K$ und $K(\varphi)_s/K$.

Der letzte Unterabschnitt führt schließlich die Spezialisierung quadratischer Formen ein. Diese stellt ein Mittel dar, verschiedene Körper anhand von quadratischen Formen unabhängig vom Begriff der Körpererweiterung miteinander zu vergleichen. Weiterhin bildet dieser Unterabschnitt die unmittelbare Grundlage für die Definition von generischen Zerfällungstürmen in Abschnitt 2.2.

2.1.1 Stellen

Ist $\Psi : K \to L$ ein Körperhomomorphismus, so muss Ψ injektiv sein. Ansonsten gäbe es ein $0 \neq x \in K$ mit $\Psi(x) = 0$, und somit wäre $\Psi(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\Psi(x)}$ nicht definiert. Also können wir $K \subset L$ annehmen. Damit ist L eine Körpererweiterung von K. Für unsere Zwecke aber ist der Begriff der Körpererweiterung zu eng gefasst. Zum Beispiel existieren zu einer Form φ über K im Allgemeinen Körpererweiterungen L, M von K mit $L \not\subset M$ und $L \not\supset M$, die unter allen Körpern F/K mit der Eigenschaft $i(\varphi_F) = i(\varphi_L) = i(\varphi_M)$ generisch sind. Sind aber L und M

generisch mit dieser Eigenschaft, so darf es keinen Unterschied machen, welchen der beiden Körper wir betrachten. Es werden also additive und multiplikative Abbildungen zwischen L und M gesucht, die den Begriff des Körperhomomorphismus verallgemeinern.

2.1.1 Definition. *Seien M und N zwei Mengen, die jeweils mit einer Verknüpfung $\circ_M$ bzw. $\circ_N$ versehen seien. Eine Abbildung $\lambda : M \to N$ heißt* Morphismus*, wenn für alle $x, y \in M$, für die $\lambda(x) \circ_N \lambda(y)$ definiert ist, auch $x \circ_M y$ definiert ist und*

$$\lambda(x \circ_M y) \;=\; \lambda(x) \circ_N \lambda(y)$$

gilt.

2.1.2 Beispiel. Ein Körperhomomorphismus $\Psi : K \to L$ ist ein Morphismus bzgl. Addition und Multiplikation, da $\Psi(x) + \Psi(y)$ bzw. $\Psi(x) \cdot \Psi(y)$ für alle $x, y \in K$ definiert ist. △

Wir fügen nun einem Körper K das Symbol ∞ hinzu und bezeichnen die resultierende Menge mit $K^\infty := K \cup \{\infty\}$. Ein Element $x \in K^\infty$ heißt *endlich*, wenn $x \in K$ liegt. Addition und Multiplikation von K setzen wir auf K^∞ fort, indem wir

$$\begin{aligned} x + \infty &:= \infty && \forall\, x \in K^\infty,\ x \neq \infty, \\ \infty \cdot x := x \cdot \infty &:= \infty && \forall\, x \in K^\infty,\ x \neq 0, \end{aligned}$$

definieren. Die einzigen nicht erlaubten Verknüpfungen sind also $0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$ und $\infty + \infty$. Das additive und multiplikative Invertieren lässt sich durch

$$0^{-1} := \infty, \quad \infty^{-1} := 0 \quad \text{und} \quad -\infty := \infty$$

auf ganz K^∞ fortsetzen. Beachte, dass hier im Gegensatz zu gewöhnlichen Körpern alle Elemente, auch die 0, invertierbar sind.

2.1.3 Definition. *Seien K, L und M Körper.*

(1) Eine Abbildung $\lambda : K^\infty \to L^\infty$ mit $\lambda(1) = 1$, die ein Morphismus bzgl. Addition und Multiplikation ist, heißt Stelle.

(2) Seien L und M Körpererweiterungen von K. Eine Stelle $\lambda : L^\infty \to M^\infty$ heißt K-Stelle*, falls $\lambda|_K = \mathrm{id}_K$ gilt.*

Mit anderen Worten, ist $\lambda(x) + \lambda(y)$ bzw. $\lambda(x) \cdot \lambda(y)$ für $x, y \in K^\infty$ definiert, so ist auch $x + y$ bzw. xy definiert und es gilt

$$\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y) \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda(x \cdot y) = \lambda(x) \cdot \lambda(y).$$

Da $\infty + \infty$ nicht definiert ist, gilt dies auch für $\lambda(\infty) + \lambda(\infty)$, und es folgt $\lambda(\infty) = \infty$. Auch $0 \cdot \infty$ und somit $\lambda(0) \cdot \lambda(\infty)$ sind nicht definiert, weshalb $\lambda(0) = 0$ gelten muss. Schließlich lässt sich nun leicht zeigen, dass

$$\lambda(x^{-1}) = \lambda(x)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \lambda(-x) = -\lambda(x)$$

für alle $x \in K^\infty$ gilt.

Meist reicht es Abbildungen $\lambda : K \to L^\infty$ zu betrachten. Ist $\mu : L \to M^\infty$ eine weitere Stelle, so kann μ durch $\infty \mapsto \infty$ trivial auf L^∞ fortgesetzt werden. So können wir die Verkettung $\mu \circ \lambda : K \to M^\infty$ bilden.

Im Folgenden wollen wir zunächst versuchen, Stellen so einfach wie möglich zu charakterisieren. Uns interessiert vor allem die Frage, durch welche Daten eine Stelle bereits eindeutig bestimmt ist. Wie bereits am Anfang von Unterabschnitt 1.1.1 angekündigt, wird sich herausstellen, dass lokale Ringe hierbei eine wesentliche Rolle spielen.

2.1.4 Definition. *Ein Unterring $\mathcal{O}$ eines Körpers K heißt* Bewertungsring von K*, falls*

$$x \in K \setminus \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad x^{-1} \in \mathcal{O}$$

gilt.

2.1.5 Lemma. *Ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K, so gelten:*

(1) Es ist K der Quotientenkörper von $\mathcal{O}$.

(2) Der Ring $\mathcal{O}$ ist lokal.

Beweis. (1): Liegt $x \in K \setminus \mathcal{O}$, so folgt $x^{-1} \in \mathcal{O}$, da $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring ist. Und per Definition gilt $x = \frac{1}{x^{-1}} \in \operatorname{Quot}(\mathcal{O})$. Somit ist $K = \operatorname{Quot}(\mathcal{O})$.

(2): Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{O}$ und $I \neq (0), \mathcal{O}$ ein Ideal in $\mathcal{O}$. Wir müssen nun zeigen, dass $I \subset \mathfrak{m}$ liegt. Dazu nehmen wir an, dass dies nicht gilt. Dann existiert ein $a \in I$ mit $a \notin \mathfrak{m}$. Hieraus folgt $a \neq 0$ und $a \notin b\mathcal{O}$ für alle $b \in \mathfrak{m}$. Durch Multiplikation mit b^{-1} erhalten wir $b^{-1}a \notin \mathcal{O}$ für alle $b \in \mathfrak{m}$, $b \neq 0$. Aus Definition 2.1.4 folgt dann $a^{-1}b \in \mathcal{O}$ für alle $b \in \mathfrak{m}$. Somit liegt $b \in a\mathcal{O}$ für alle $b \in \mathfrak{m}$. Folglich gilt $\mathfrak{m} \subset a\mathcal{O} \subset I$ und also $\mathfrak{m} = I$, da $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $I \not\subset \mathfrak{m}$. $\square$

2.1.6 Satz. *Seien K und L Körper.*

(1) Ist $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle, so ist $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \lambda(x) \neq \infty\}$ ein Bewertungsring von K mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \lambda(x) = 0\}$. Wir nennen $\mathcal{O}$ auch den Bewertungsring von λ.

(2) Sei umgekehrt $\mathcal{O} \subset K$ ein Bewertungsring von K mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, und sei $\lambda : \mathcal{O} \to L$ ein Ringhomomorphismus. Dann existiert eine eindeutige Stelle $\mu : K \to L^\infty$, die λ fortsetzt. Diese ist gegeben durch

$$x \longmapsto \begin{cases} \lambda(x) & \text{für } x \in \mathcal{O} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. (1): Für $x, y \in \mathcal{O}$ ist $\lambda(x), \lambda(y) \neq \infty$. Somit sind $\lambda(x)\lambda(y)$ und $\lambda(x) - \lambda(y)$ definiert und endlich. Aus der Definition einer Stelle folgt $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y) \neq \infty$ und $\lambda(x - y) = \lambda(x) - \lambda(y) \neq \infty$. Also liegen auch xy und $x - y$ in $\mathcal{O}$. Folglich ist $\mathcal{O}$ ein Teilring von K. Sei nun $x \in K \setminus \mathcal{O}$. Dann gilt $\lambda(x) = \infty$ und somit $\lambda(x^{-1}) = \lambda(x)^{-1} = 0$. Also liegt $x \in \mathcal{O}$. Nach Definition 2.1.4 ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K. Wegen $\mathfrak{m} = \ker(\lambda|_{\mathcal{O}})$ ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal von $\mathcal{O}$. Weiterhin gilt $\lambda(x) \neq 0, \infty$ für $x \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$ und somit $\lambda(x^{-1}) \neq 0, \infty$, weshalb $x^{-1} \in \mathcal{O}$ liegt. Nach Lemma 1.1.1 ist $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$.

(2): Wir zeigen zunächst, dass μ tatsächlich eine Stelle ist. Nach Definition eines Ringhomomorphismus gilt $\lambda(1) = 1$. Seien $x, y \in K$, so dass $\mu(x) + \mu(y)$ definiert ist. Dann muss eines der beiden Elemente x und y in $\mathcal{O}$ liegen. Liegen beide in $\mathcal{O}$, so gilt $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x + y)$, da $\lambda = \mu|_{\mathcal{O}}$ additiv ist. Liegt $x \in \mathcal{O}$ und $y \notin \mathcal{O}$, so gilt $x + y \notin \mathcal{O}$ und es folgt $\mu(x) + \mu(y) = \infty = \mu(x + y)$.

Seien nun $x, y \in K$, so dass $\mu(x)\mu(y)$ definiert ist. Liegen $x, y \in \mathcal{O}$, so gilt $\mu(x)\mu(y) = \mu(xy)$, da $\lambda = \mu|_{\mathcal{O}}$ auch multiplikativ ist. Ist $\mu(x) = \infty$, so gilt $x^{-1} \in \mathcal{O}$ nach Definition 2.1.4 und somit $x^{-1} \in \mathfrak{m}$ nach Lemma 1.1.1. Es ist $\mu(y) \neq 0$, da $\infty \cdot 0$ nicht definiert ist. Hieraus folgt $y^{-1} \in \mathcal{O}$ aus Lemma 1.1.1, falls $y \in \mathcal{O}$ liegt, und aus Definition 2.1.4, falls $y \notin \mathcal{O}$ liegt. Wir erhalten $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} \in \mathfrak{m}$ und somit $\mu(xy) = \infty = \mu(x)\mu(y)$.

Sei $\mu' : K \to L^\infty$ eine weitere Stelle, die λ fortsetzt. Dann gilt $\mu'(x) = \mu(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$. Für $x \in K \setminus \mathcal{O}$ liegt $x^{-1} \in \mathfrak{m}$, weshalb $\mu'(x) = \infty = \mu(x)$ gelten muss. Es folgt $\mu = \mu'$. □

Wie wir in Unterabschnitt 2.1.3 sehen werden, ist der Funktionenkörper einer Form über K eine endliche Erweiterung vom Grad ≤ 2 einer rein transzendenten Erweiterung von K. Es liegt also nahe, gerade rein transzendente und quadratische Körpererweiterungen genauer zu untersuchen.

2.1.7 Lemma. *Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann existiert zu jeder endlichen Teilmenge $\varnothing \neq A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset K^*$ ein $u \in K$, so dass $ua_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt und ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $ua_j \notin \mathfrak{m}$ existiert.*

Beweis. Wir verfahren per Induktion nach n. Ist $n = 1$, so ist die Behauptung trivial. Sei $n > 2$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $t \in K$, so dass $\{ta_2, \ldots, ta_n\} \subset \mathcal{O}$ und ohne Einschränkung $ta_2 \notin \mathfrak{m}$ gilt. Ist $ta_1 \in \mathcal{O}$, so sind wir fertig. Sei also $ta_1 \notin \mathcal{O}$. Dann ist $u = \frac{1}{ta_1} \in \mathfrak{m}$, und es folgt $uta_1 = 1$ und $uta_i \in \mathfrak{m}$ für $i = 2, \ldots, n$. □

2.1.8 Lemma. *Seien K und L Körper und $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle. Sind $X_1, \ldots, X_n$ Unbestimmte über K und $Y_1, \ldots, Y_n$ Unbestimmte über L, so kann λ eindeutig zu einer Stelle $\mu : K(X_1, \ldots, X_n) \to L(Y_1, \ldots, Y_n)^\infty$ mit $\mu(X_i) = Y_i$ fortgesetzt werden, $i = 1, \ldots, n$.*

[Sch85, Lemma 6.11, Seite 161]

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von λ und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal, $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ und $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$. Definiere

$$\mathcal{P} := \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) \;\middle|\; f, g \in \mathcal{O}[X],\, g \notin \mathfrak{m}[X] \right\}$$

und

$$\mathfrak{n} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{P} \;\middle|\; f \in \mathfrak{m}[X],\, g \in \mathcal{O}[X] \setminus \mathfrak{m}[X] \right\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathcal{P}$ ein Teilring von $K(X)$ und $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathcal{P}$ ist. Sei $\frac{f}{g} \in K(X) \setminus \mathcal{P}$. Dann existiert nach Lemma 2.1.7 ein Element $u \in K$, so dass die Koeffizienten von uf und ug sämtlich in $\mathcal{O}$ liegen. Weiterhin hat mindestens eines der beiden Polynome uf und ug einen Koeffizienten $a \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$. Da $uf, ug \in \mathcal{O}[X]$ und $\frac{uf}{ug} \in K(X) \setminus \mathcal{P}$ gilt, muss $ug \in \mathfrak{m}[X]$ liegen und a zu uf gehören. Es folgt $uf \notin \mathfrak{m}[X]$ und somit $\frac{g}{f} \in \mathcal{P}$. Also ist $\mathcal{P}$ ein Bewertungsring von $K(X)$. Da alle Elemente aus $\mathcal{P} \setminus \mathfrak{n}$ per Konstruktion in $\mathcal{P}$ invertierbar sind, ist $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von $\mathcal{P}$.

Der Ringhomomorphismus $\lambda|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to L$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung $\iota : \mathcal{O}[X] \to L[Y]$ mit $\iota(X_i) = Y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Da $\iota(g) \neq 0$ für $g \in \mathcal{O}[X] \setminus \mathfrak{m}[X]$ gilt, kann ι natürlich und eindeutig zu einem Ringhomomorphismus $\kappa : \mathcal{P} \to L(Y)$ mit $\mathfrak{n} = \ker(\kappa)$ fortgesetzt werden. Satz 2.1.6 (2) liefert uns die gesuchte Stelle μ. □

2.1.9 Satz. *Sei K ein Körper und $K(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten X. Dann existiert zu jedem $y \in K^\infty$ eine eindeutige K-Stelle $\lambda : K(X) \to K^\infty$ mit $\lambda(X) = y$. Allgemeiner existiert zu jeder rein transzendenten Erweiterung $L = K(X_1, \ldots, X_n)$ von K vom Transzendenzgrad n und beliebigen Elementen $y_1, \ldots, y_n \in K^\infty$ eine eindeutige K-Stelle $\mu : L \to K^\infty$ mit $\mu(X_i) = y_i$.*

Beweis. $y \neq \infty$: Wir definieren eine Abbildung

$$\iota : K[X] \longrightarrow K, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i y^i.$$

Man rechnet leicht nach, dass es sich hierbei um einen Ringhomomorphismus handelt. Dieser ist durch die Eigenschaften $\iota|_K = \mathrm{id}_K$ und $\iota(X) = y$ eindeutig bestimmt. Sei $\mathfrak{p}$ der Kern von ι und $K[X]_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) \;\middle|\; f, g \in K[X],\ g \notin \mathfrak{p} \right\}$ die Lokalisierung von $K[X]$ bei $\mathfrak{p}$. Dann lässt sich ι eindeutig zu einem Ringhomomorphismus $\kappa : K[X]_{\mathfrak{p}} \to K$, $\frac{f}{g} \mapsto \frac{\iota(f)}{\iota(g)}$, fortsetzen.

Es ist $K[X]$ ein Hauptidealring (siehe [Bos03, Korollar 3, Seite 45]), weshalb ein $p \in K[X]$ mit $\mathfrak{p} = (p)$ existiert. Sei $\frac{f}{g} \in K(X) \setminus K[X]_{\mathfrak{p}}$. Dann muss $g \in \mathfrak{p}$ liegen. Da $K[X]$ euklidisch ist, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass eines der beiden Polynome f und g nicht von p geteilt wird. Dies muss dann f sein, was $f \notin \mathfrak{p}$ bedeutet. Somit liegt $\frac{g}{f} \in K[X]_{\mathfrak{p}}$. Also ist $K[X]_{\mathfrak{p}}$ ein Bewertungsring von $K(X)$. Satz 2.1.6 (2) liefert uns dann die gesuchte eindeutige Stelle λ als Fortsetzung von κ.

$y = \infty$: Aus dem bereits Bewiesenen folgt die Existenz einer eindeutigen K-Stelle $\lambda' : K(X) \to K^\infty$ mit $\lambda'(X) = 0$. Bilden wir die Verkettung $\lambda := \lambda' \circ \Psi$ mit dem durch $X \mapsto \frac{1}{X}$ definierten K-Automorphismus Ψ von $K(X)$, so gilt $\lambda(y) = y$ für alle $y \in K$ und $\lambda(X) = \lambda'(\frac{1}{X}) = \infty$. Somit ist λ die gesuchte K-Stelle.

Der Rest der Behauptung folgt mit Hilfe vollständiger Induktion. □

Nehmen wir die letzten beiden Resultate zusammen, so erhalten wir das folgende Korollar.

2.1.10 Korollar. *Sei $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle und $y_1, \ldots, y_n \in L^\infty$ beliebig, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\mu : K(X_1, \ldots, X_n) \to L^\infty$ von λ mit $\mu(X_i) = y_i$.*

Das folgende Resultat findet sich als Lemma 3.5 in [Kne76] ohne Beweis. Knebusch gibt an, dass der Beweis leicht mit zwei Resultaten aus der Bewertungstheorie folgt. In Scharlaus Buch über quadratische und hermitesche Formen [Sch85] findet man dieses Lemma in Kapitel 4 als Lemma 6.14. Allerdings gibt auch Scharlau nur für den ersten Teil des Lemmas einen kompletten Beweis an. Der Beweis des zweiten Teils lässt, wie Scharlau selbst bemerkt, einen wesentlichen Fall außer acht. Wir geben hier einen alternativen, vollständigen Beweis an.

2.1.11 Satz. *Sei E ein Körper und $K = E(\alpha)$ mit $\alpha^2 = a \in E$ und $\alpha \notin E$. Weiterhin sei $\lambda : E \to L^\infty$ eine Stelle.*

(1) Ist $\lambda(a) \neq 0, \infty$ und existiert ein $\beta \in L$ mit $\lambda(a) = \beta^2$, so kann λ eindeutig zu einer Stelle $\mu : K \to L^\infty$ mit $\mu(\alpha) = \beta$ fortgesetzt werden.

(2) Gilt $\lambda(ac^2) = 0, \infty$ für alle $c \in E$, so kann λ eindeutig zu einer Stelle $\mu : K \to L^\infty$ fortgesetzt werden.

[Sch85, Lemma 6.14, Seite 162]

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von λ und $\mathfrak{m} = \ker(\lambda)$ sein maximales Ideal. Ferner sei $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von L. Dann existiert eine Fortsetzung $\mu : K \to \overline{L}^\infty$ von λ (siehe [Bou72, Proposition 3, Chap. VI.2.4]). Wir wollen nun zeigen, dass alle Werte von μ in L^∞ liegen.

(1): Aus $\mu(a) = \lambda(a) = \beta^2$ folgt $\mu(\alpha) = \pm\beta$. Ohne Einschränkung können wir von $\mu(\alpha) = \beta$ ausgehen, da wir ansonsten μ mit dem durch $\alpha \mapsto -\alpha$ definierten E-Automorphismus von K verketten können.

Für $x, y \in E$ wollen wir $\mu(x + y\alpha) \in L^\infty$ zeigen. Die trivialen Fälle $x = 0$ bzw. $y = 0$ schließen wir aus. Zunächst sei $\frac{y}{x} \in \mathcal{O}$. Dann gilt

$$\mu(x + y\alpha) = \mu\Big(x\left(1 + \frac{y}{x}\alpha\right)\Big) \qquad \text{und} \qquad \mu\Big(1 + \frac{y}{x}\alpha\Big) = 1 + \lambda\Big(\frac{y}{x}\Big)\beta.$$

Ist $1 + \lambda(\frac{y}{x})\beta \neq 0$, so erhalten wir

$$\mu(x + y\alpha) \;=\; \lambda(x)\left(1 + \lambda\Big(\frac{y}{x}\Big)\beta\right) \;\in\; L^\infty. \tag{2.1}$$

Für $1 + \lambda(\frac{y}{x})\beta = 0$ gilt

$$2 \;=\; 1 - \lambda\Big(\frac{y}{x}\Big)\beta \;=\; \mu\Big(1 - \frac{y}{x}\beta\Big) \;\in\; L$$

und somit

$$2\mu(x + y\alpha) \;=\; \mu\Big(1 - \frac{y}{x}\alpha\Big)\mu\Big(x\left(1 + \frac{y}{x}\alpha\right)\Big) \;=\; \lambda\Big(x - \frac{y^2}{x}a\Big) \;\in\; L^\infty. \tag{2.2}$$

Es folgt $\mu(x + y\alpha) \in L^\infty$.

Liegt $\frac{y}{x} \notin \mathcal{O}$, so folgt $\frac{x}{y} \in \mathfrak{m} = \ker(\lambda)$ aus Definition 2.1.4 und Lemma 1.1.1. In diesem Fall gilt

$$\mu(x + y\alpha) \;=\; \mu\left(y\left(\frac{x}{y} + \alpha\right)\right) \;=\; \lambda(y)\beta \;\in\; L^\infty. \tag{2.3}$$

Aus den Gleichung (2.1), (2.2) und (2.3) wird deutlich, dass μ bereits eindeutig durch λ und die Eigenschaft $\mu(\alpha) = \beta$ bestimmt ist.

(2): Aus der Voraussetzung folgt $\lambda(a) = 0, \infty$. Ohne Einschränkung können wir $\lambda(a) = 0$ annehmen, da wir wegen $E(\alpha) = E(\frac{1}{\alpha})$ ansonsten a durch $\frac{1}{a}$ ersetzen könnten. Für $x, y \in E$ müssen wir $\mu(x + y\alpha) \in L^\infty$ zeigen[1]. Die Fälle $\mu(x + y\alpha) = 0, \infty \in L^\infty$ sind uninteressant. Sei also $\mu(x + y\alpha) = u \in \overline{L}^*$. Liegen $x, y \in \mathcal{O}$, so gilt $\mu(x + y\alpha) = \lambda(x) \in L$. Setzen wir $x \in \mathcal{O}$ und $y \notin \mathcal{O}$ voraus, so folgt $\mu(y\alpha) \neq \infty$. Läge $\mu(y\alpha) = v \in \overline{L}^*$, so wäre $\mu(ay^2) = v^2 \neq 0, \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\mu(y\alpha) = 0$ und somit $\mu(x + y\alpha) = \lambda(x) \in L$ gelten.

[1]Scharlau betrachtet hier wie im Beweis des ersten Teils zunächst den Fall, dass $\frac{y}{x} \in \mathcal{O}$ liegt. Ist dies nicht der Fall, so liegt, wie bereits im Beweis von Punkt (1) bemerkt, $\frac{x}{y} \in \mathfrak{m}$. Genau diesen Fall schließt Scharlau allerdings aus.

Sind $x, y \notin \mathcal{O}$, so muss $\mu(\alpha y) = \infty$ gelten, da wir $\mu(x + y\alpha) \neq 0, \infty$ vorausgesetzt haben. Aus $\mu(x + y\alpha) = \mu(x(1 + \frac{y}{x}\alpha)) = u \in \overline{L}^*$ folgt $\mu(1 + \frac{y}{x}\alpha) = 0$ und somit $\mu(\frac{y}{x}\alpha) = -1$. Wir erhalten

$$u \;=\; \mu\Big(-\frac{y}{x}\alpha\Big)\,\mu(x + y\alpha) \;=\; \mu\bigg(-y\alpha - \frac{y^2}{x}a\bigg)$$

und weiter

$$2u \;=\; \mu(x + y\alpha) + \mu\bigg(-y\alpha - \frac{y^2}{x}a\bigg) \;=\; \lambda\bigg(x - \frac{y^2}{x}a\bigg) \;\in\; L^\infty.$$

Also liegt auch $u \in L^\infty$.

Analog wie im Beweis von Teil (1) wird aus dem vorherigen deutlich, dass μ durch λ und die Eigenschaft $\mu(\alpha) = 0$ bereits eindeutig bestimmt ist. $\square$

Abschließend untersuchen wir die Möglichkeit Stellen auf *freie Komposita* von Körpern fortzusetzen. Dazu benötigen wir die folgenden Begriffe.

2.1.12 Definition. *Seien L und M Körpererweiterungen von K.*

(1) Die Erweiterung L von K heißt regulär, *wenn $L \otimes_K M$ für jede beliebige Erweiterung M von K ein Integritätsring ist.*

(2) Sei L regulär über K. Der Körper

$$L \cdot_K M \;:=\; \mathrm{Quot}(L \otimes_K M)$$

heißt freies Kompositum *von L und M über K.*

2.1.13 Lemma. *Seien L, L' reguläre und M eine beliebige Körpererweiterung von K, und sei $\lambda : L \to (L')^\infty$ eine K-Stelle. Dann existiert eine eindeutige M-Stelle $\mu : L \cdot_K M \to (L' \cdot_K M)^\infty$, die λ fortsetzt.*

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von λ. Betrachte den Ringhomomorphismus

$$\iota : \mathcal{O} \otimes_K M \longrightarrow L' \cdot_K M, \quad \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda(a_i) \otimes b_i.$$

Dieser ist durch die Eigenschaften $\iota(1 \otimes b) = 1 \otimes b$ für alle $b \in M$ und $\iota(a \otimes 1) = \lambda(a) \otimes 1$ für alle $a \in \mathcal{O}$ bereits eindeutig bestimmt. Sei $\mathcal{P} := (\mathcal{O} \otimes_K M)_{\ker(\iota)}$ die Lokalisierung von $\mathcal{O} \otimes_K M$ nach $\ker(\iota)$, und der Ringhomomorphismus $\kappa : \mathcal{P} \to L' \otimes_K M$ die eindeutige Fortsetzung von ι auf $\mathcal{P}$. Wir wollen beweisen, dass $\mathcal{P}$ ein Bewertungsring von $L \cdot_K M$ ist.

Zunächst zeigen wir, dass $\mathrm{Quot}(\mathcal{O} \otimes_K M) = L \cdot_K M$ gilt. Sei $a \otimes b \in (L \otimes_K M)$. Liegt $a \otimes b \notin \mathcal{O} \otimes_K M$, so kann $a \notin \mathcal{O}$ liegen, und es gilt $(a \otimes b)^{-1} = \frac{1}{a} \otimes \frac{1}{b} \in \mathcal{O} \otimes_K M$, da $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring ist. Auf jeden Fall gilt also $a \otimes b \in \mathrm{Quot}(\mathcal{O} \otimes_K M)$. Es folgt $L \otimes_K M \subset \mathrm{Quot}(\mathcal{O} \otimes_K M)$ und somit $L \cdot_K M = \mathrm{Quot}(\mathcal{O} \otimes_K M)$.

Sei $z \in (L \cdot_K M) \setminus \mathcal{P}$. Da $L \cdot_K M$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O} \otimes_K M$ ist, existiert eine Darstellung $z = \frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathcal{O} \otimes_K M$. Da $z \notin \mathcal{P}$ liegt, muss $\iota(y) = 0$ gelten. Es existieren Darstellungen

$$x \;=\; \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \qquad \text{und} \qquad y \;=\; \sum_{j=1}^m c_j \otimes d_j$$

so, dass die Mengen $\{b_1, \dots, b_n\}$ und $\{d_1, \dots, d_m\}$ jeweils linear unabhängig über K sind. Aus

$$0 \;=\; \iota(y) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \lambda(c_j) \otimes d_j$$

folgt somit $c_j \in \mathfrak{m}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Nach Lemma 2.1.7 existiert ein $u \in L$, so dass $U := \{ua_1, \dots, ua_n, uc_1, \dots, uc_m\} \subset \mathcal{O}$ gilt und mindestens ein Element von U nicht in $\mathfrak{m}$ liegt. Es muss weiterhin $\iota((u \otimes 1)y) = 0$ gelten, da ansonsten $z = \frac{(u\otimes 1)x}{(u\otimes 1)y} \in \mathcal{P}$ liegen würde. Es folgt wieder $uc_j \in \mathfrak{m}$ für alle $j = 1, \dots, m$. Entsprechend können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $ua_1 \notin \mathfrak{m}$ liegt. Würde $\iota((u \otimes 1)x) = 0$ gelten, so würde aus der linearen Unabhängigkeit der b_i der Widerspruch $\lambda(ua_1) = 0$ folgen. Also muss $\iota((u \otimes 1)x) \neq 0$ und somit $z^{-1} = \frac{y}{x} \in \mathcal{P}$ liegen. Folglich ist $\mathcal{P}$ ein Bewertungsring und Satz 2.1.6 (2) liefert uns die K-Stelle $\mu : L \cdot_K M \to (L' \cdot_K M)^\infty$.

Da μ eine Fortsetzung von κ ist, muss μ sogar eine M-Stelle sein. Es ist μ nach Satz 2.1.6 (2) als Fortsetzung von κ eindeutig bestimmt. Da κ als Lokalisierung von ι eindeutig ist und ι durch λ eindeutig bestimmt ist, muss dies auch für μ gelten. □

2.1.2 Der Funktionenkörper einer quadratischen Form

Es sei noch einmal daran erinnert, dass wir grundsätzlich davon ausgehen, dass jede betrachtete quadratisch Form regulär ist, falls nicht ausdrüchlich das Gegenteil vorausgesetzt wird.

Um den Funktionenkörper einer Form definieren zu können, müssen wir uns ein wenig mit dem geometrischen Aspekt quadratischer Formen beschäftigen. Im Folgenden sei stets φ eine Form über K mit $\dim(\varphi) = n \in \mathbb{N}_0$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ ein Spaltenvektor in n Unbestimmten. Um zu verdeutlichen, dass wir φ als Polynom über K betrachten, schreiben wir $\varphi(X)$. Ist $A_\varphi = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ die assoziierte Matrix von φ, so hat $\varphi(X)$ die Gestalt

$$\varphi(X) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j .$$

Durch $\varphi(X)$ wird die algebraische Menge

$$Z(\varphi(X)) \;=\; \{v \in K^n \mid \varphi(v) = 0\}$$

definiert. Dabei heißt eine Teilmenge $V \subset K^n$ *algebraisch*, falls V die Nullstellenmenge einer Teilmenge von $K[X]$ ist.

Uns interessiert der Quotientenkörper von $K[X]/(\varphi(X))$. Damit dieser wohldefiniert ist, muss $K[X]/(\varphi(X))$ ein Integritätsring sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $(\varphi(X))$ ein Primideal ist, also genau dann, wenn $\varphi(X)$ irreduzibel ist. In diesem Fall ist $Z(\varphi(X))$ eine Varietät, wobei eine *Varietät* eine irreduzible algebraische Menge ist. Es stellt sich also die Frage, wann $\varphi(X)$ irreduzibel ist. Der folgende Satz, dessen Beweis von Michael Adam stammt, beantwortet diese Frage.

2.1.14 Satz. *Sei φ eine (reguläre) Form über K mit $n = \dim(\varphi) \geq 2$. Dann ist das Polynom $\varphi(X)$ irreduzibel oder es gilt $\varphi \cong \mathbb{H}$.*

Beweis. Da $\varphi(X) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i X_j$ Grad 2 hat, muss jede nichttriviale Zerlegung $\varphi(X) = fg$ aus Polynomen vom Grad 1 bestehen. Dabei müssen f und g homogen sein, da $\varphi(X)$ homogen ist. Sei zum Beispiel $f = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ und $g = \sum_{j=1}^n b_j X_j$.

Wir nehmen zunächst an, es sei $n \geq 3$ und $\varphi(X)$ reduzibel. Da durch f und g lineare Abbildungen $f, g : K^n \to K$ definiert werden, gilt für b_φ und $x, y \in K^n$

$$\begin{aligned} b_\varphi(x,y) &= \frac{1}{2}\big(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x+y)g(x+y) - f(x)g(x) - f(y)g(y)\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\big(f(x)+f(y)\big)\big(g(x)+g(y)\big) - f(x)g(x) - f(y)g(y)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x)g(y) + f(y)g(x)\big). \end{aligned}$$

Also ist $b_\varphi(x,y) = 0$ für alle $y \in K^n$, falls $x \in \ker(f) \cap \ker(g)$ liegt. Es folgt $\mathrm{Rad}(\varphi) \supset \ker(f) \cap \ker(g)$. Da aber $\dim_K(\ker(f)), \dim_K(\ker(g)) \geq n-1$ ist, muss $\dim_K(\mathrm{Rad}(\varphi)) \geq n-2 \geq 1$ gelten. Folglich ist φ nichtregulär, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Sei nun $n = 2$ und $\varphi(X)$ reduzibel. Da $\dim_K(\ker(f)) \geq 1$ gilt, existiert ein $x \in \ker(f)$ mit $x \neq 0$. Ist p reduzibel, so folgt $\varphi(x) = f(x)g(x) = 0$. Also ist φ isotrop und somit isometrisch zu $\mathbb{H}$. $\square$

2.1.15 Definition. *Sei φ eine Form über K mit $\dim(\varphi) \geq 2$ und $\varphi \ncong \mathbb{H}$. Dann heißt der Quotientenkörper von*

$$K[X]/(\varphi(X)) \;=\; K[X_1,\dots,X_n]/\big(\varphi((X_1,\dots,X_n)^t)\big)$$

der Funktionenkörper von φ *und wird mit $K(\varphi)$ bezeichnet. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir $K(\varphi) := K$, falls $\dim(\varphi) \leq 1$ oder $\varphi \cong \mathbb{H}$ gilt.*

Sei $\varphi \ncong \mathbb{H}$ eine n-dimensionale Form über K mit $n \geq 2$. Betrachte die natürliche Projektion $P : K[X] \to K[X]/(\varphi(X))$. Sei $x_i := P(X_i)$ für $i = 1,\dots,n$. Dann wird $K(\varphi)$ über K von den Elementen x_i erzeugt. Das heißt es gilt $K(\varphi) = K(x_1,\dots,x_n)$, und $(x_1,\dots,x_n)^t \in K(\varphi)^n$ ist eine nichttriviale Nullstelle von $\varphi_{K(\varphi)}$. Wir bezeichnen diese auch als *generische Nullstelle* von φ. Sei $i \in \{1,\dots,n\}$. Dann ist auch $(\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i})^t$ eine Nullstelle von $\varphi_{K(\varphi)}$, da

$$\varphi_{K(\varphi)}\left(\left(\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)^t\right) \;=\; \frac{1}{x_i^2}\varphi_{K(\varphi)}((x_1,\dots,x_n)^t) \;=\; 0$$

gilt.

2.1.16 Definition. *Sei φ eine Form über K mit $\dim(\varphi) \geq 2$ und $\varphi \ncong \mathbb{H}$. Dann nennen wir $K(\varphi)_s := K(\frac{x_2}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1})$ den* kleinen Funktionenkörper von φ. *Für den Fall, dass $\dim(\varphi) \leq 1$ oder $\varphi \cong \mathbb{H}$ gilt, setzen wir $K(\varphi)_s := K$.*

2.1.3 Eigenschaften des Funktionenkörpers

Im Folgenden sei wieder φ eine Form über K mit $\dim(\varphi) = n \in \mathbb{N}_0$ und $X = (X_1,\dots,X_n)^t$ ein Spaltenvektor in n Unbestimmten. Es sei $P : K[X] \to K[X]/(\varphi(X))$ die natürliche Projektion und $x_i := P(X_i)$ für $i = 1,\dots,n$.

Aus der Definition des Funktionenkörpers einer Form φ über K wird sofort deutlich, dass dieser invariant unter Ähnlichkeit ist. Das heißt für alle $a \in K^*$ gilt $K(\varphi) = K(a\varphi)$. Es stellt sich nun die Frage, ob der Funktionenkörper einer Form auch invariant unter Isometrie ist.

2.1.17 Satz. *Seien φ und ψ n-dimensionale Formen über K mit $\varphi \cong \psi$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $K(\varphi) \cong K(\psi)$ und somit $K(\varphi)_s \cong K(\psi)_s$.*

Beweis. Sei $n = \dim(\varphi) = \dim(\psi)$. Ist $n \leq 1$ oder $\varphi \cong \mathbb{H}$, so gilt $K(\varphi) = K$ und es ist nichts zu zeigen. Schließen wir diese Fälle also aus. Nach Voraussetzung existiert eine Matrix $T \in GL_n(K)$ mit $\varphi(v) = \psi(Tv)$ für alle $v \in K^n$. Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Betrachte die Varietäten

$$V = \left\{ v \in \overline{K}^n \;\middle|\; \varphi_{\overline{K}}(v) = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W = \left\{ v \in \overline{K}^n \;\middle|\; \psi_{\overline{K}}(v) = 0 \right\}.$$

Da die Polynome $\varphi(X)$ und $\varphi(TX)$ auch über $\overline{K}$ gleich bleiben, folgt $\varphi_{\overline{K}} \cong \psi_{\overline{K}}$. Die Isometrie T ist ein Isomorphismus von Varietäten. Somit weiß man aus der algebraischen Geometrie (siehe zum Beispiel [Uen99, Proposition 1.21, Seite 19]), dass mit $X = (X_1, \dots X_n)^t$

$$K[X]/(\varphi(X)) \;=\; K[V] \;\cong\; K[W] \;=\; K[X]/(\psi(X))$$

gilt. Sofort folgt die Isometrie der Quotientenkörper $K(\varphi)$ und $K(\psi)$. $\square$

Um überhaupt mit dem Funktionenkörper einer Form φ arbeiten zu können, müssen wir genaueres über die Struktur der Körpererweiterung $K(\varphi)$ von K wissen. Offensichtlich ist $K(\varphi)$ im Allgemeinen eine transzendente Körpererweiterung von K. Genaueres behandelt der nächste Satz.

2.1.18 Satz. *Sei φ eine Form über K mit $n = \dim(\varphi) \geq 2$ und $\varphi \ncong \mathbb{H}$. Dann ist $K(\varphi)$ eine algebraische Erweiterung vom Grad ≤ 2 einer rein transzendenten Erweiterung vom Transzendenzgrad $n - 1$ über K.*

[Sch85, Remarks 5.2 (v), Seite 154]

Beweis. Nach Satz 2.1.17 können wir ohne Einschränkung $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ annehmen. Wie bereits festgestellt gilt

$$\varphi((x_1, \dots, x_n)^t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 0 \;\in\; K[X]/(\varphi(X)).$$

Durch eine einfache Umformung erhalten wir

$$x_1 = \sqrt{-\frac{1}{a_1}(a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2)} \;\in\; K(\varphi). \tag{2.4}$$

Zu zeigen ist nur noch, dass die Elemente $x_2, \dots, x_n$ in $K(\varphi)$ algebraisch unabhängig über K sind. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es ein Polynom $F \in K[X_2, \dots, X_n]$, $F \neq 0$, so dass $f := P(F)$ in $K(\varphi)$ identisch 0 ist. Hieraus folgt bereits, dass

$$0 \;=\; f \;\in\; K[X]/(\varphi(X))$$

gilt. Es existiert also ein Polynom $G \in K[X]$ mit $F = G\varphi(X) \in K[X]$. Das Polynom F ist ein Polynom in den Unbestimmten $X_2, \dots, X_n$. Also muss auch $G, \varphi(X) \in K[X_2, \dots, X_n]$ gelten, da X_1 in $K[X]$ nicht invertierbar und $K[X]$ ein Integritätsring ist. Es folgt $a_1 = 0$, und somit ist φ nichtregulär. Dies aber hatten wir allgemein ausgeschlossen. $\square$

Offensichtlich ist $K(\varphi)$ eine rein transzendente Körpererweiterung vom Grad 1 von $K(\varphi)_s$. Der Erzeuger von $K(\varphi)$ über $K(\varphi)_s$ ist x_1. Da der Vektor $\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)^t$ eine nichttriviale Nullstelle von $\varphi \otimes K(\varphi)_s$ ist, müssen die Elemente $\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}$ algebraisch abhängig über K sein. Aus dieser Tatsache folgt $\operatorname{transgrad}_K(K(\varphi)_s) \leq n-2$ und somit

$$\operatorname{transgrad}_K(K(\varphi_s)) \;=\; \operatorname{transgrad}_K(K(\varphi)) - 1 \;=\; n-2.$$

2.1.19 Satz. *Sei φ eine Form über K mit $n = \dim(\varphi) \geq 3$. Dann ist $K(\varphi)$ genau dann eine rein transzendente Körpererweiterung vom Grad $n-1$ über K, wenn φ isotrop ist.*

[Sch85, Remarks 5.2 (vi), Seite 154]

Beweis. Der Transzendenzgrad von $K(\varphi)$ ist offensichtlich endlich. Ist $K(\varphi)$ rein transzendent, so ist $\varphi \otimes K(\varphi)$ nach Korollar 1.2.3 genau dann isotrop, wenn φ isotrop ist. Über $K(\varphi)$ hat $\varphi \otimes K(\varphi)$ eine generische Nullstelle, weshalb φ isotrop sein muss.

Sei umgekehrt φ isotrop. Bis auf Isometrie existiert nur eine einzige reguläre, isotrope, 2-dimensionale Form über K, namentlich χ mit $\chi((X_1, X_2)^t) = 2X_1X_2$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\varphi = \chi \perp \varphi'$ mit einer geeigneten Form $\varphi' = \langle a_3, \ldots, a_n \rangle$ in Diagonalgestalt gilt. Hieraus folgt

$$\varphi((x_1, \ldots, x_n)^t) \;=\; 2x_1x_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i x_i^2 \;=\; 0 \;\in\; K[X]/(\varphi(X)).$$

Durch einfaches Umformen erhalten wir

$$x_1 \;=\; -\frac{1}{2x_2} \sum_{i=3}^{n} a_i x_i^2 \;\in\; K(\varphi). \tag{2.5}$$

Mit denselben Argumenten, die wir bereits im vorherigen Beweis genutzt haben, lässt sich zeigen, dass $x_2, \ldots, x_n$ in $K(\varphi)$ algebraisch unabhängig sind. Also ist $K(\varphi)$ eine rein transzendente Körpererweiterung vom Grad $n-1$ über K, und es gilt genauer

$$K(\varphi) \;=\; K(x_2, \ldots, x_n) \;\cong\; K(X_2, \ldots, X_n).$$

□

Als Folgerung aus diesen zwei Sätzen erhält man sofort die Aussage, dass der Funktionenkörper nicht invariant unter Äquivalenz von Formen ist.

2.1.20 Korollar. *Seien φ und ψ Formen über K, so dass $\varphi \sim \psi$ aber $\varphi \ncong \psi$ gilt. Dann ist $K(\varphi) \ncong K(\psi)$.*

2.1.21 Beispiel. Sei φ eine zweidimensionale Form über K, die nicht isometrisch zur hyperbolischen Ebene ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass φ Diagonalgestalt hat. Da der Funktionenkörper invariant unter Ähnlichkeit ist, können wir zusätzlich annehmen, dass $\varphi = \langle 1, a \rangle$ mit $a \in K^*$ gilt. Dann ist $d(\varphi) = -a \neq 1$. Aus dem Beweis von Satz 2.1.18 folgt, dass $K(\varphi) \cong K(Y)(\sqrt{d})$ mit einer Unbestimmten Y über K und $d \in d(\varphi)$ gilt. Hieraus ergibt sich $K(\varphi)_s \cong K(\sqrt{d(\varphi)})$. Ist speziell $\varphi = \langle 1, 1 \rangle$ über $\mathbb{R}$, so ist $\mathbb{R}(\varphi)_s \cong \mathbb{C}$. △

Für den Beweis des folgenden Satzes benötigen wir eine spezielle Charakterisierung von regulären Körpererweiterungen. Nach [Bos03, Satz 14, Kap. 7, Seite 319] ist eine Körpererweiterung L von K genau dann regulär, wenn L separabel über K und K in L algebraisch abgeschlossen ist.

2.1.22 Satz. *Für eine Form φ über K mit $n = \dim(\varphi) \geq 3$ ist der Funktionenkörper $K(\varphi)$ regulär.*

Beweis. Wir hatten gesehen, dass $M := K(x_2, \ldots, x_n)$ rein transzendent über K und $K(\varphi) = M(x_1)$ ist mit $[K(\varphi) : M] \leq 2$. Da rein transzendente und quadratische Körpererweiterungen grundsätzlich separabel sind, folgt sofort die Separabilität von $K(\varphi)$.

Aus $n \geq 3$ folgt $\operatorname{transgrad}_K(K(\varphi)) \geq 2$. Da M über K rein transzendent ist, ist K in M algebraisch abgeschlossen. Weiterhin liegt $x_1^2 \notin K$ (vergleiche (2.4) und (2.5)), weshalb K auch in $K(\varphi) = M(x_1)$ algebraisch abgeschlossen ist. $\square$

2.1.4 Spezialisierung

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(K)$ eine beliebige Matrix, $n \in \mathbb{N}_0$. Ist $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle, so ist $(\lambda(a_{ij}))_{i,j=1,\ldots,n}$ eine Matrix über L^∞. Diese wollen wir der Einfachheit halber mit $\lambda(A)$ bezeichnen. Für $n = 0$ verstehen wir $\lambda(A)$ als die leere Matrix.

2.1.23 Definition. *Sei φ eine n-dimensionale Form über K, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle. Wir sagen, dass φ* gute Reduktion *bzgl. λ besitzt, wenn eine zu φ isometrische Form ψ mit assoziierter Matrix $A_\psi = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ existiert, so dass $\lambda(a_{ij}) \neq \infty$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\det(\lambda(A_\psi)) \neq 0$ gilt. Andernfalls besitzt φ* schlechte Reduktion*.*

Ursprünglich hat Manfred Knebusch in [Kne73, Seite 283] den Begriff der guten Reduktion über den Bewertungsring $\mathcal{O}$ einer Stelle $\lambda : K \to L^\infty$ definiert: Eine Form φ über K hat gute Reduktion bzgl. λ, wenn eine reguläre Form ψ über $\mathcal{O}$ existiert, so dass $\psi \otimes K \cong \varphi$ gilt. Beachte, dass die Form ψ über $\mathcal{O}$ genau dann regulär ist, wenn $\det(\psi) \in \mathcal{O}^*$ liegt. Ist $\mathfrak{m} = \ker(\lambda)$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$, so ist $\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$. Man sieht leicht, dass Knebuschs ursprüngliche Definition zu Definition 2.1.23 äquivalent ist.

Der folgende Satz wird in [MH73, Seite 93] als Corollary 3.3 für Dedekindringe bewiesen. Dieser Beweis lässt sich allerdings direkt für Bewertungsringe übertragen.

2.1.24 Satz. *Sei $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle und $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von λ. Dann ist der über die Inklusion $\mathcal{O} \to K$ definierte Homomorphismus $W(\mathcal{O}) \to W(K)$ injektiv.*

Beweis. Sei ψ eine Form über $\mathcal{O}$, so dass $\varphi := \psi \otimes K$ hyperbolisch ist. Wir müssen zeigen, dass dann auch ψ bereits hyperbolisch ist. Sei $U \subset K^n$ der Unterraum mit $U^\perp = U$ und $\dim_K(U) = \frac{1}{2}\dim_K(V_\varphi)$ aus Satz 1.1.24. Dann ist $N = U \cap \mathcal{O}^n \subset \mathcal{O}^n$ offensichtlich ein freier $\mathcal{O}$-Untermodul vom Rang $\operatorname{rang}(N) = \frac{1}{2}\operatorname{rang}(R^n) = \frac{1}{2}\dim_K(K^n)$. Es gilt genau dann $b_\varphi(v, u) = 0$ für alle $u \in U$, wenn $v \in U$ liegt. Ist nun $n \in N$, so folgt $b_\psi(m, n) = 0$ für alle $m \in N$ und also $N \subset N^\perp$. Aus der Bilinearität von b_φ folgt, dass ein Element $v \in K^n$ bereits orthogonal zu U steht, wenn es orthogonal zu N steht. Also ist $N = N^\perp$, und nach Satz 1.1.24 ist ψ hyperbolisch. $\square$

Hieraus folgt, dass zwei über K isometrische Formen φ und ψ mit $A_\varphi, A_\psi \in M_n(\mathcal{O})$ bereits über $\mathcal{O}$ isometrisch sind. Also sind die Matrizen $\lambda(A_\varphi)$ und $\lambda(A_\psi)$ über L kongruent und somit die zugehörigen Formen isometrisch. Insbesondere existiert nach Theorem 1.1.13 eine zu φ über $\mathcal{O}$ isometrische Form in Diagonalgestalt. Dadurch wird die folgende Definition möglich.

2.1.25 Definition. *Sei φ eine n-dimensionale Form über K mit guter Reduktion bzgl. der Stelle $\lambda : K \to L^\infty$ und ψ die zu φ isometrische Form aus Definition 2.1.23 mit assoziierter Matrix $A_\psi \in M_n(\mathcal{O})$. Dann nennen wir die durch $\lambda(A_\psi)$ definierte Form über L* Spezialisierung *von φ bzgl. λ und bezeichnen sie mit $\lambda_*(\varphi)$.*

Sei φ eine hyperbolische Form über K und $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle. Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi \cong i \times \mathbb{H}$ gilt. Aus $\lambda(1) = 1$ folgt, dass φ und also jede hyperbolische Form über K gute Reduktion bezüglich λ besitzt. Die Spezialisierung einer hyperbolischen Form ist also immer ebenfalls hyperbolisch.

2.1.26 Satz. *Seien φ, ψ und χ Formen über K mit $\varphi \cong \psi \perp \chi$. Haben φ und ψ gute Reduktion bzgl. einer Stelle $\lambda : K \to L^\infty$, so auch χ, und es gilt*

$$\lambda_*(\varphi) \;\cong\; \lambda_*(\psi) \perp \lambda_*(\chi).$$

[Kne73, Proposition 2.2, Seite 284]

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von λ, und seien φ' und ψ' Formen über $\mathcal{O}$ mit $\varphi' \otimes K \cong \varphi$ und $\psi' \otimes K \cong \psi$. Es ist $\varphi \perp (-\psi) \sim \chi$ und also $(\varphi \perp (-\psi))_{an} \cong \chi_{an}$. Nach Satz 2.1.24 gilt

$$(\varphi' \perp (-\psi'))_{an} \otimes K \;\cong\; (\varphi \perp (-\psi))_{an}$$

und somit

$$\big((\varphi' \perp (-\psi'))_{an} \perp (i(\chi) \times \mathbb{H})\big) \otimes K \;\cong\; \chi.$$

Hieraus folgt sofort der Rest der Behauptung. □

Ist L eine Körpererweiterung von K und $\lambda : K \to L^\infty$ die zugehörige Inklusion, so hat jede Form über K gute Reduktion bzgl. λ. Die Abbildung λ_* entspricht dann der Restriktionsabbildung in [Sch85, Chapter 2, §5]. In diesem Fall definiert λ sicherlich einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$\lambda_* : W(K) \longrightarrow W(L), \quad \{\varphi\} \longmapsto \{\lambda_*(\varphi)\} = \{\varphi_L\}.$$

Den Kern von λ_* bezeichnen wir mit $W(L/K)$ und nennen ihn *Wittkern von L über K*. Wir heben uns eine eingehendere Untersuchung dieses Begriffes für Abschnitt 3.1 auf, in welchem wir wichtige Strukturaussagen über Wittkerne behandeln werden.

2.1.27 Definition. *Zwei Körper L und M heißen* äquivalent*, falls Stellen $\lambda : L \to M^\infty$ und $\mu : M \to L^\infty$ existieren. Üblicherweise schreiben wir in diesem Fall $K \sim L$. Sind L und M Körpererweiterungen von K und λ, μ K-Stellen, so heißen L und M* K-äquivalent*, und wir schreiben $L \sim_K M$.*

Mit den folgenden zwei Resultaten komplettieren wir schließlich die nötigen Grundlagen, so dass wir uns im nächsten Abschnitt mit dem eigentlichen Thema dieser Arbeit, namentlich der generischen Zerfällung von quadratischen Formen, beschäftigen können.

2.1.28 Proposition. *Seien L und M Körpererweiterungen von K und $\lambda : L \to M^\infty$ eine K-Stelle. Sei φ eine Form über K, $\psi := (\varphi \otimes L)_{an}$ und $\chi := (\varphi \otimes M)_{an}$.*

(1) Die Form ψ besitzt bzgl. λ gute Reduktion und es gilt $\lambda_*(\psi) \sim \chi$. Insbesondere ist $\lambda_*(\psi)$ bis auf Isometrie unabhängig von der Wahl von λ.

(2) Es gilt $i(\varphi_M) \geq i(\varphi_L)$. Sind L und M äquivalent, so folgt $i(\varphi_L) = i(\varphi_M)$ und es ist $\lambda_*(\psi) \cong \chi$.

[Kne76, Proposition 3.1, Seite 68]

Beweis. (1): Es ist $\varphi_L \cong \psi \perp (i(\varphi_L) \times \mathbb{H})$. Offensichtlich hat φ_L gute Reduktion, da A_φ nur Einträge in K hat und λ eine K-Stelle ist. Wir hatten bereits gesehen, dass jede hyperbolische Form gute Reduktion besitzt. Nach Satz 2.1.26 hat also auch ψ gute Reduktion bzgl. λ. Und aus $\lambda_*(\varphi_L) \cong \varphi_M$ folgt $\lambda_*(\psi) \sim \chi$. Da $\lambda_*(\psi)$ den anisotropen Kern χ hat und dies für jede K-Stelle λ gilt, folgt der Rest der Behauptung.

(2): Die Spezialisierung einer hyperbolischen Form ist wieder hyperbolisch. Hieraus folgt sofort $i(\varphi_M) \geq i(\varphi_L)$. □

2.1.29 Satz. *Sei φ eine Form über K mit $n = \dim(\varphi) \geq 2$ und $\varphi \ncong \mathbb{H}$. Ferner bezeichne $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ einen Spaltenvektor in n Unbestimmten und $P : K[X] \to K[X]/(\varphi(X))$ die natürliche Projektion. Setze $x_i := P(X_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Schließlich sei $A_\varphi = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle.*

(1) Die Form φ stelle ein Element $c \in K$ mit $\lambda(c) \neq 0, \infty$ dar. Dann kann λ genau dann zu einer Stelle $\mu : K(\varphi) \to L^\infty$ fortgesetzt werden, wenn entweder φ gute Reduktion hat und $\lambda_*(\varphi)$ isotrop ist oder φ schlechte Reduktion hat.

(2) Sei $\lambda(a_{ij}) \neq \infty$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $\det(\lambda(A_\varphi)) \neq 0$. Weiterhin sei $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ eine nichttriviale Nullstelle der durch $\lambda(A_\varphi)$ definierten Form $\psi = \lambda_*(\varphi)$ über L. Dann existiert eine Stelle $\mu : K(\varphi) \to L^\infty$ mit $\mu|_K = \lambda$, so dass $\lambda(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.

[Kne76, Theorem 3.3, Seite 69]

Beweis. (2): Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von λ und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$. Da φ gute Reduktion besitzt, existiert eine Form ρ mit $\rho \cong \varphi$, so dass $A_\rho \in M_n(\mathcal{O})$ Diagonalgestalt hat. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, das $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ mit $a_i \in \mathcal{O}^* = \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}$ gilt. Für $i = 1, \dots, n$ setze $b_i := \lambda(a_i)$. Weiterhin sei $K' = K(x_2, \dots, x_n)$ und ohne Einschränkung $y_1 \neq 0$. Da K' rein transzendent über K ist, wie aus dem Beweis von Satz 2.1.18 hervorgeht, existiert nach Korollar 2.1.10 eine Fortsetzung $\nu : K' \to L^\infty$ von λ mit $\nu(x_i) = y_i$ für $i = 2, \dots, n$. Aus Gleichung (2.4) folgt

$$x_1^2 \;=\; -\frac{1}{a_1}(a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2).$$

Es gilt $K'(x_1) = K(\varphi)$ und aus $\lambda_*(\varphi)(y) = \psi(y) = 0$ folgt

$$\nu(x_1^2) \;=\; -\frac{1}{b_1}(b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2) \;=\; y_1^2 \;\neq\; 0.$$

Liegt $x_1 \in K'$, so ist ν bereits die gesuchte Stelle. Andernfalls existiert nach Satz 2.1.11 (1) eine Stelle $\mu : K(\varphi) \to L^\infty$, die ν und somit λ fortsetzt und $\mu(x_1) = y_1$ erfüllt.

(1): Wir nehmen zunächst an φ besitze gute Reduktion. Falls λ zu einer Stelle $\mu : K(\varphi) \to L^\infty$ fortgesetzt werden kann, so gilt offensichtlich $\lambda_*(\varphi) = \mu_*(\varphi \otimes K(\varphi))$. Also ist $\lambda_*(\varphi)$ isotrop. Gehen wir davon aus, dass $\lambda_*(\varphi)$ isotrop ist, so folgt bereits aus Punkt (2), dass λ zu einer Stelle $\mu : K(\varphi) \to L^\infty$ fortgesetzt werden kann.

Betrachten wir den Fall, dass φ schlechte Reduktion besitzt. Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von λ und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. Nach Voraussetzung stellt φ ein Element $c \in \mathcal{O}^*$ dar. Ist $a \notin \mathcal{O}$, so ist $a\frac{1}{a^2} \in \mathfrak{m}$. Da die Einträge einer Form in Diagonalgestalt nur bis auf quadratische Faktoren interessieren, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ mit $a_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_n = c$ und $\lambda(a_1 d^2) = 0, \infty$ für alle $d \in K$ gilt. Letzteres können wir annehmen, da φ schlechte Reduktion besitzt.

Sei $K' = K(x_2, \ldots, x_n)$ und $L' = K(Y_2, \ldots, Y_n)$ der rationale Funktionenkörper in $n-1$ Unbestimmten über L. Nach Satz 2.1.8 lässt sich λ zu einer Stelle $\lambda' : K' \to (L')^\infty$ mit $\lambda'(x_i) = Y_i$ fortsetzen. Wieder gilt

$$x_1^2 \;=\; -\frac{1}{a_1}(a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2).$$

Wir wollen zeigen, dass $\lambda'(x_1^2 z^2)$ für alle $z \in K'$ die Werte 0 oder ∞ annimmt. Dann würde nach Satz 2.1.11 (2) eine Stelle $\nu : K'(x_1) \cong K(\varphi) \to (L')^\infty$ existieren, die λ' fortsetzt. Ist $\gamma : L' \to L^\infty$ eine beliebige Stelle, so wäre $\mu = \gamma \circ \nu : K(\varphi) \to L^\infty$ die von uns gesuchte Stelle.

Sei $z \in K'$, $z \neq 0$, beliebig. Dann existiert nach Lemma 2.1.7 ein $d \in K$ und Polynome $f, g \in K[x_2, \ldots, x_n]$ mit $z = d\frac{f}{g}$, so dass alle Koeffizienten von f und g in $\mathcal{O}$ liegen und sowohl f als auch g jeweils mindestens einen Koeffizienten haben, der nicht in $\mathfrak{m}$ liegt. Also sind $\lambda'(f)$ und $\lambda'(g)$ endlich und nichtnull. Es folgt

$$\lambda'(x_1^2 z^2) \;=\; -\Big(\lambda(a_2)Y_2^2 + \cdots + \lambda(a_n)Y_n^2\Big)\lambda'(f)^2\, \lambda'(g)^{-2}\, \lambda'\Big(\frac{1}{a_1}d^2\Big).$$

Da alle Faktoren bis auf den letzten endlich und nichtnull sind (beachte $\lambda(a_n) = \lambda(c) \neq 0, \infty$), ist das Produkt auf der rechten Seite immer definiert und gleich der linken Seite. Wie oben festgelegt ist $a_1^{-1} d^2$ und somit auch $\lambda'(x_1^2 z^2)$ immer 0 oder ∞. □

2.2 Generische Zerfällungstürme

Generische Zerfällungstürme gehören zu den wichtigsten Hilfsmitteln in der Theorie der generischen Zerfällung, und wahrscheinlich sogar in der gesamten algebraischen Theorie quadratischer Formen. Zu beachten ist, dass sich diese Theorie nur am Rande mit Zerfällungskörpern von quadratischen Formen beschäftigt. Dabei ist ein Zerfällungskörper einer Form φ über K eine Körpererweiterung L von K mit $\dim((\varphi_L)_{an}) \leq 1$. Allgemeiner werden Körpererweiterungen von K betrachtet, die unter allen Erweiterungen N von K, so dass $i(\varphi_N)$ einen bestimmten Wert annimmt, generisch sind. Da über solchen Körpern die Form φ im Allgemeinen nicht vollständig zerfällt, spricht man häufig auch von der Theorie der partiellen generischen Zerfällung.

Im ersten Unterabschnitt führen wir generische Nullstellenkörper ein. Es wird sich herausstellen, dass der zweite Körper innerhalb eines generischen Zerfällungsturms einer Form gerade ein generischer Nullstellenkörper dieser Form ist. Wir untersuchen den Fall, dass eine Form ψ über dem generischen Nullstellenkörper einer Form φ zerfällt. Besonders interessant ist dabei der Spezialfall, dass φ eine Pfisterform ist. Anschließend führen wir Pfisternachbarn ein, die, wie speziell in Abschnitt 3.2 noch deutlich werden wird, eine besonders wichtige Klasse von quadratischen Formen innerhalb der Theorie der generischen Zerfällung darstellen. Als eine der vielen möglichen Anwendungen dieser Theorie beweisen wir den Hauptsatz von Arason und Pfister.

Der zweite Unterabschnitt beschäftigt sich endlich mit generischen Zerfällungstürmen einer Form φ über K. Wir definieren diese induktiv mit Hilfe der bereits behandelten generischen Nullstellenkörper und zeigen, warum das Attribut „generisch“ gerechtfertigt ist. Daraufhin konstruieren wir für einen beliebigen Erweiterungskörper L von K aus einem generischen Zerfällungsturm von φ einen solchen für φ_L.

Im dritten Unterabschnitt beschreiben wir zunächst das gesamte Zerfällungsverhalten von Pfisterformen und ihren reinen Anteilen. Das Ergebnis ermöglicht uns die Definition der Leitform und Aussagen über deren mögliche Dimension. Schließlich untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Diskriminante und Clifford-Invariante einer Form und ihrer Leitform. Mit Hilfe des Begriffes der Leitform einer quadratischen Form können wir dann im vierten Unterabschnitt den Grad einer Form definieren, was wiederum eine Filtrierung des Wittrings durch Ideale ermöglicht, die der Filtrierung durch die Potenzen des Fundamentalideals ähnelt. Knebusch hat in [Kne76] vermutet, dass diese beiden Filtrierungen gleich sind. Wir zitieren hier das Resultat, durch das diese Vermutung bestätigt wurde.

Die in diesem Abschnitt behandelten Begriffe wie „generischer Nullstellenkörper“ und „generischer Zerfällungsturm“ wurden sämtlich von Manfred Knebusch in [Kne76] und [Kne77] eingeführt. Mit diesen beiden Artikeln schuf Knebusch die Grundlagen für die Theorie der generischen Zerfällung über Körpern der Charakteristik $\neq 2$.

2.2.1 Generische Nullstellenkörper und Pfisternachbarn

Im Folgenden bezeichne $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ stets einen Spaltenvektor in $n \geq 1$ Unbestimmten. Sei $X' = (X_2, \ldots, X_n)^t$.

2.2.1 Definition. *Sei φ eine Form über K. Eine Körpererweiterung L von K heißt* generischer Nullstellenkörper *von φ, falls* *(i) die Form φ_L isotrop ist und*

(ii) für jede Körpererweiterung M von K, so dass φ_M isotrop ist, eine K-Stelle $\lambda : L \to M^\infty$ existiert.

Sei φ eine Form über K mit $\dim(\varphi) \geq 2$. Wir hatten gesehen, dass $\varphi \otimes K(\varphi)$ eine generische Nullstelle besitzt und also isotrop ist. Ist M eine weitere Körpererweiterung von K, so dass φ_M isotrop ist, so kann die Einbettung $\lambda : K \to M$ nach Satz 2.1.29 (i) zu einer Stelle $\mu : K(\varphi) \to M^\infty$ fortgesetzt werden. Dies bedeutet, dass $K(\varphi)$ tatsächlich ein generischer Nullstellenkörper von φ ist. Da $K(\varphi)$ eine Erweiterung von $K(\varphi)_s$ und diese Erweiterung rein transzendent ist, gilt $K(\varphi) \sim_K K(\varphi)_s$. Also ist auch $K(\varphi)_s$ ein generischer Nullstellenkörper von φ.

Ist φ eine Form über K, so kann man die Frage nach dem Minimum

$$a(\varphi) := \min\{\mathrm{transgrad}_K(L) \mid L \text{ ist generischer Nullstellenkörper von } \varphi\}$$

der Transzendenzgrade aller generischen Nullstellenkörper von φ stellen. Ist $n = \dim(\varphi) \leq 1$ oder $\varphi \cong \mathbb{H}$, so ist $K(\varphi) = K$ und somit $a(\varphi) = 0$. In den übrigen Fällen wissen wir bereits, dass $a(\varphi) \leq \mathrm{transgrad}_K(K(\varphi)_s) = n - 2$ gilt. Eine genauere Behandlung dieser Frage findet sich auf den Seiten 76-78 in [Kne76].

2.2.2 Definition. *Wir sagen, dass eine Form φ über K* zerfällt, *falls $\dim(\varphi_{an}) \leq 1$ gilt.*

Sei τ eine Pfisterform über K. Ist τ isotrop oder $\dim(\tau) = 1$, so zerfällt τ nach Theorem 1.2.15 (2) über K. Für $\dim(\tau) \geq 2$ ist $\tau \otimes K(\tau)$ isotrop. Dies bedeutet, dass jede Pfisterform über ihrem Funktionenkörper zerfällt. Am Anfang des Unterabschnitts 2.2.3 werden wir umgekehrt sehen, dass nur Pfisterformen und bestimmte Teilformen von Pfisterformen über ihrem eigenen Funktionenkörper zerfallen.

2.2.3 Lemma. *Sei $\varphi = \langle 1\rangle \perp \varphi'$ eine n-dimensionale und ψ eine beliebige Form über K, $n \in \mathbb{N}$. Ist $\psi_{K(\varphi)}$ hyperbolisch, so gilt $\varphi_L(X)\psi_L \cong \psi_L$ mit $L = K(X)$.*

[Sch85, Lemma 5.3, Seite 154]

Beweis. Den trivialen Fall $\psi \sim 0$ schließen wir aus. Ist $n = 1$ oder φ isotrop, so ist $K(\varphi) = K$ oder $K(\varphi)$ rein transzendent über K und nach Voraussetzung ψ hyperbolisch. Nach Theorem 1.2.15 (2) ist ψ streng multiplikativ. Auch über $L = K(X)$ bleibt ψ hyperbolisch und streng multiplikativ, weshalb ψ_L universell ist und $D_L^*(\psi) \subset G_L(\psi)$ gilt. Es folgt, dass ψ_L den generischen Wert $\varphi_L(X)$ darstellt und dieser ein Ähnlichkeitsfaktor von ψ_L ist.

Sei nun $\dim(\varphi) \geq 2$ und φ anisotrop. Weiterhin sei $L' = K(X')$. Aus dem Beweis von Satz 2.1.18 wird deutlich, dass

$$K(\varphi) \cong L'\left(\sqrt{-\varphi'(X')}\right)$$

gilt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass ψ anisotrop ist, da wir ansonsten ψ durch ψ_{an} ersetzen könnten. Die Form $\psi_{L'}$ ist anisotrop, da L' rein transzendent über K ist. Aber $\psi_{K(\varphi)}$ ist hyperbolisch, weshalb nach Korollar 1.2.6 folgt, dass

$$\psi_{L'} \cong \chi \otimes \langle 1, \varphi'(X')\rangle$$

mit einer geeigneten Form χ über L' gilt. Die Form $\langle 1, \varphi'(X')\rangle_L$ repräsentiert $\varphi_L(X)$. Insbesondere ist $\langle 1, \varphi'(X')\rangle_L$ eine Pfisterform. Aus Korollar 1.2.16 folgt, dass $\varphi_L(X)$ ein Ähnlichkeitsfaktor von $\langle 1, \varphi'(X')\rangle_L$ und somit auch von ψ_L ist. □

2.2.4 Satz. *Sei φ eine Form über K der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ und ψ eine nichthyperbolische Form, für die $\psi \otimes K(\varphi) \sim 0$ gilt. Dann ist φ ähnlich einer Teilform von ψ. Genauer gilt $ab\varphi \subset \psi$ für beliebiges $a \in D_K^*(\varphi)$ und $b \in D_K^*(\psi)$.*

[Kne76, Lemma 4.5, Seite 75]

Beweis. Aus $\psi \not\sim 0$ und $\psi \otimes K(\varphi) \sim 0$ folgt, dass $\dim(\psi)$ gerade und $\dim(\varphi) \geq 2$ ist. Ferner folgt, dass φ anisotrop sein muss. Indem wir ψ durch ψ_{an} ersetzen, können wir annehmen, dass ψ anisotrop ist und $\dim(\psi) \geq 2$ gilt. Sei $a \in D_K^*(\varphi)$. Dann existiert eine Zerlegung $a\varphi \cong \langle 1\rangle \perp \varphi'$. Sei $L = K(X)$. Da auch $\psi \otimes K(a\varphi) \sim 0$ gilt, folgt aus Lemma 2.2.3, dass $a\varphi_L(X)\,\psi_L \cong \psi_L$ gilt. Also wird $ab\varphi_L(X)$ für jedes $b \in D_K(\psi)$ von ψ_L dargestellt. Aus dem Teilform-Theorem 1.2.8 folgt $ab\varphi \subset \psi$. □

2.2.5 Satz. *Sei τ eine k-fache Pfisterform über K mit $k \geq 1$ und φ eine anisotrope Form über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *Es gilt $\varphi \otimes K(\tau) \sim 0$.*

(ii) *Es existiert eine Form χ mit $\varphi \cong \tau \otimes \chi$.*

(iii) *Es existiert eine Form χ mit $\varphi \sim \tau \otimes \chi$.*

Gilt $\varphi \otimes K(\tau) \sim 0$, so kann insbesondere für beliebiges $a \in D_K^*(\varphi)$ die Form χ so gewählt werden, dass ebenfalls $a \in D_K^*(\chi)$ gilt.

[Kne76, Lemma 4.4, Seite 75]

Beweis. Die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$ gilt, da $\tau_{K(\tau)}$ zerfällt, und die Folgerung $(ii) \Rightarrow (iii)$ ist trivial. Es bleibt also nur noch $(i) \Rightarrow (ii)$ zu zeigen. Nach dem vorherigen Satz existiert eine Form φ' über K mit $\varphi \cong a\tau \perp \varphi'$ für beliebiges $a \in D_K^*(\varphi)$. Beachte, dass $1 \in D_K^*(\tau)$ liegt. Die Teilform φ' ist wieder anisotrop und zerfällt über $K(\tau)$. Einfache Induktion über $\dim(\varphi)$ liefert uns die Behauptung. □

2.2.6 Bemerkung. In Beispiel 2.1.21 hatten wir den kleinen Funktionenkörper einer 2-dimensionalen Form berechnet. Da der kleine und der große Funktionenkörper einer Form äquivalent sind, sieht man, dass die vorigen zwei Sätze jeweils Verallgemeinerungen des Satzes 1.2.5 und des Korollars 1.2.6 darstellen. △

Mit dem letzten Satz stehen uns nun die Mittel zur Verfügung, zu zeigen, dass Pfisterformen durch ihren Funktionenkörper bis auf Isometrie bereits eindeutig bestimmt sind.

Sei τ eine Pfisterform über K. Dann stellt τ die 1 dar, wie man leicht aus der Definition 1.2.14 einer Pfisterform abliest. Es existiert also eine Zerlegung $\tau = \langle 1\rangle \perp \tau'$, wobei τ' nach dem Kürzungssatz 1.1.17 bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist. Wir nennen τ' den *reinen Anteil* von τ und bezeichnen diesen in Zukunft einfach mit $\tau_p := \tau'$.

2.2.7 Theorem. *Seien φ und ψ anisotrope Formen über K mit $n = \dim(\varphi)$ und $m = \dim(\psi)$ und $n, m \geq 2$.*

(1) *Sind φ und ψ Pfisterformen und $K(\varphi)$ und $K(\psi)$ äquivalent, so gilt bereits $\varphi \cong \psi$.*

(2) *Ist φ eine Pfisterform oder der reine Anteil einer solchen, und ist $K(\varphi)$ isomorph zu $K(\psi)$, so sind φ und ψ ähnlich.*

[Kne76, Theorem 4.2, Seite 74]

Beweis. (1): Da $K(\varphi)$ und $K(\psi)$ äquivalent sind, gilt $\psi \otimes K(\varphi) \sim 0$ und $\varphi \otimes K(\psi) \sim 0$. Nach Satz 2.2.5 wird φ von ψ geteilt und umgekehrt. Da jedes dargestellte Element auch Ähnlichkeitsfaktor einer Pfisterform ist, folgt die Behauptung.

(2): Sei zunächst φ eine Pfisterform. Da $K(\varphi) \cong K(\psi)$ gilt, zerfällt $\varphi \otimes K(\psi)$. Also wird ψ von φ geteilt. Da aber $\operatorname{transgrad}_K(K(\varphi)) = \operatorname{transgrad}_K(K(\psi))$ gilt, muss $\dim(\varphi) = \dim(\psi)$ gelten. Also ist ψ ähnlich zu φ.

Sei nun $\varphi \cong \tau_p$ für eine Pfisterform τ über K. Da $\tau_p \otimes K(\psi)$ isotrop ist, muss $\tau \otimes K(\psi)$ zerfallen. Nach Satz 2.2.4 existiert ein $a \in K^*$ und eine Form χ über K, so dass $\tau \cong a\psi \perp \chi$ gilt. Aus $\dim(\tau_p) = \dim(\psi)$ folgt $\chi = \langle b \rangle$ mit einem $b \in K^*$. Da b von τ dargestellt wird, folgt $\tau \cong b\tau \cong ab\psi \perp \langle 1 \rangle$ und somit aus dem Kürzungssatz von Witt $\varphi \cong \tau_p \cong ab\psi$. □

2.2.8 Definition. *Eine Form φ über K heißt* Pfisternachbar*, falls eine Pfisterform τ mit $\dim(\varphi) > \frac{1}{2}\dim(\tau)$ und ein $a \in K^*$ mit $\varphi \subset a\tau$ existiert. Wir nennen φ dann auch* Pfisternachbar von τ*. Es existiert eine Form η über K, so dass $\varphi \perp \eta \cong a\tau$ gilt. Wir bezeichnen η als* Komplement *von φ. Die ganze Zahl* $\operatorname{codim}(\varphi) := \dim(\eta) = \dim(\tau) - \dim(\varphi)$ *heißt* Kodimension *von φ.*

Sei φ ein Pfisternachbar von τ mit $\varphi \subset a\tau$ für ein $a \in K^*$, und sei $b \in D_K^*(\varphi)$. Dann ist $ab \in D_K^*(\tau) = G_K(\tau)$, und es gilt

$$\varphi \;\subset\; a\tau \;\cong\; a^2 b\tau \;\cong\; b\tau.$$

Das heißt, dass $\varphi \subset b\tau$ für jedes $b \in D_K^*(\varphi)$ gilt. Sei andererseits η ein Komplement von φ und $c \in D_K^*(\eta)$. Wieder liegt $ac \in D_K^*(\tau) = G_K(\tau)$, und es folgt

$$\varphi \perp \eta \;\cong\; a\tau \;\cong\; a^2 c\tau \;\cong\; c\tau.$$

Also gilt auch $\varphi \subset c\tau$ für alle $c \in D_K^*(\eta)$.

2.2.9 Beispiel. Ist τ eine k-fache Pfisterform mit $k \geq 2$, so ist der reine Anteil τ_p immer auch ein Pfisternachbar von τ. △

2.2.10 Satz. *Sei φ ein Pfisternachbar von τ. Dann gilt $K(\varphi) \sim_K K(\tau)$.*

[Kne76, Example 4.1 (i), Seite 73]

Beweis. Ist $\dim(\tau) \leq 1$, so ist die Behauptung trivial, da in diesem Fall $K(\varphi) = K = K(\tau)$ gilt. Sei also $\dim(\tau) > 1$, $a \in K^*$ und η eine Form über K, so dass $a\tau \cong \varphi \perp \eta$ gilt. Da $\varphi \otimes K(\varphi)$ isotrop ist, zerfällt $\tau \otimes K(\varphi)$. Dies bedeutet, dass eine K-Stelle $\lambda : K(\tau) \to K(\varphi)^\infty$ existiert. Andererseits gilt

$$(\varphi \perp \eta) \otimes K(\tau) \;\cong\; a\tau \otimes K(\tau) \sim 0.$$

Es folgt $\varphi_{K(\tau)} \sim -\eta_{K(\tau)}$. Da aber $\dim(\varphi) \geq \dim(\eta) + 2$ gilt, muss $\varphi \otimes K(\tau)$ isotrop sein und also eine K-Stelle $\mu : K(\varphi) \to K(\tau)^\infty$ existieren. □

Aus dem eben geführten Beweis kann man ablesen, dass auch der reine Anteil einer k-fachen Pfisterform mit $k \geq 2$ über seinem Funktionenkörper zerfällt.

Bisher wissen wir nicht, ob die Pfisterform τ und das Komplement η zu einem Pfisternachbar φ über K bis auf Isometrie eindeutig bestimmt sind. Streng genommen muss dies allerdings gelten, damit die Bezeichnungen *Pfisternachbar* und *Komplement* ohne den Bezug auf eine Pfisterform wohldefiniert sind. Die Eindeutigkeit von τ ist klar, wenn φ isotrop ist. In diesem Fall ist τ hyperbolisch und offensichtlich bis auf Isometrie eindeutig bestimmt. Sei nun φ ein anisotroper Pfisternachbar einer weiteren Pfisterform σ. Dann folgt aus Satz 2.2.10, dass $K(\varphi) \sim K(\tau)$, $K(\varphi) \sim K(\sigma)$ und somit $K(\tau) \sim K(\sigma)$ gilt. Theorem 2.2.7 (1) liefert $\tau \cong \sigma$.

Sei η ein Komplement von φ und $a \in K^*$ so, dass $a\tau \cong \varphi \perp \eta$ gilt. Ferner sei χ eine weitere Form über K und $b \in K^*$, so dass zudem $b\tau \cong \varphi \perp \chi$ gilt. Ist $c \in D_K^*(\varphi)$, so muss wie bereits beobachtet $a\tau \cong c\tau \cong b\tau$ gelten. Aus dem Kürzungssatz von Witt 1.1.17 folgt $\eta \cong \chi$. Also ist auch das Komplement eines Pfisternachbarn bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Seien φ und ψ anisotrope Formen über K. Wie in der Einleitung beschrieben ist eine der wichtigsten Fragen in der Theorie der generischen Zerfällung, ob $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop ist oder nicht. Wir können nun eine vollständige Antwort auf diese Frage geben, falls φ ein Pfisternachbar ist.

2.2.11 Theorem. *Sei φ ein anisotroper Pfisternachbar der Pfisterform τ über K. Für eine anisotrope Form ψ ist $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop, wenn* $\dim(\psi) \geq 2$ *und ψ ähnlich einer Teilform von τ ist.*

Beweis. Ist $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop, so zerfällt $\tau \otimes K(\psi)$. Hieraus folgt bereits $\dim(\psi) \geq 2$, da φ als anisotrop vorausgesetzt wurde. Nach Satz 2.2.4 ist ψ ähnlich einer Teilform von τ.

Sei umgekehrt $\dim(\psi) \geq 2$ und ψ ähnlich einer Teilform von τ. Dann zerfällt $\tau \otimes K(\psi)$, es existiert also eine Stelle $K(\tau) \to K(\psi)^\infty$. Da nach Satz 2.2.10 die Funktionenkörper von τ und φ äquivalent sind, existiert eine Stelle $K(\varphi) \to K(\psi)^\infty$, und es ist $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop. □

2.2.12 Bemerkung. In allen Sätzen dieses Unterabschnitts kann der Funktionenkörper $K(\varphi)$ einer Form φ durch einen beliebigen generischen Nullstellenkörper von φ ersetzt werden, da alle generischen Nullstellenkörper einer Form äquivalent sind. Dies gilt insbesondere auch für Theorem 2.2.7 (1) und Theorem 2.2.11. △

Eine weitere schöne Eigenschaft eines Pfisternachbarn φ mit $\dim(\varphi) \geq 3$ ist, dass die Diskriminante des Komplements in engem Zusammenhang zur Diskriminante von φ steht. Diese Tatsache wird uns noch in einigen der folgenden Beweise sehr nützlich sein.

2.2.13 Lemma. *Sei φ ein Pfisternachbar der Dimension $n \geq 3$, τ die zugehörige Pfisterform und η das Komplement von φ. Dann gilt $d(\varphi) = (-1)^n d(\eta)$.*

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\dim(\tau) = 2^k$. Sicherlich ist $k \geq 2$. Aus $\det(\varphi \perp \eta) = 1$ folgt $\det(\varphi) = \det(\eta)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2^k - n)(2^k - n - 1) &= \frac{1}{2}(2^{2k} - n2^{k+1} + n^2 - 2^k + n) \\ &= 2^{2k-1} - n2^k + 2^{k-1} + \frac{1}{2}(n^2 - n + 2n) \\ &\equiv \frac{n(n-1)}{2} + n \pmod 2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $d(\eta) = (-1)^n d(\varphi)$, also $d(\varphi) = d(\eta)$, falls n gerade ist, und $d(\varphi) = -d(\eta)$, falls n ungerade ist. □

Als Anwendung der bisher erarbeiteten Ergebnisse können wir nun eines der wichtigsten Resultate in der Theorie der quadratischen Formen beweisen. Wir wissen bereits, dass die k-te Potenz $I^k(K)$ des Fundamentalideals additiv von den k-fachen Pfisterformen erzeugt wird (siehe Satz 1.2.24). Allerdings konnten wir bisher keine genaueren Angaben über die Eigenschaften einer beliebigen Form φ mit Äquivalenzklasse in $I^k(K)$ machen.

2.2.14 Theorem. (Arason-Pfister-Hauptsatz)
Sei φ eine anisotrope Form über K mit $\dim(\varphi) \geq 1$. Ist $\{\varphi\} \in I^k(K)$, so gilt $\dim(\varphi) \geq 2^k$.

[Sch85, Theorem 5.6, Seite 156]

Beweis. Da $I(K)$ nur Klassen geradedimensionaler Formen enthält, können wir annehmen, dass $k > 1$ ist. Nach Satz 1.2.24 existieren anisotrope, k-fache Pfisterformen τ_i und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ so, dass

$$\varphi \sim \varepsilon_1\tau_1 \perp \ldots \perp \varepsilon_r\tau_r$$

gilt. Wir verfahren per Induktion nach r. Ist $r = 1$, so ist nichts weiter zu zeigen. Für $r > 1$ setzen wir $L = K(\tau_1)$. Dann gilt

$$\varphi_L \sim \varepsilon_2(\tau_2)_L \perp \ldots \perp \varepsilon_r(\tau_r)_L.$$

Ist $\varphi_L \sim 0$, so existiert nach Satz 2.2.5 eine Form ψ über K, so dass $\varphi \cong \tau_1 \otimes \psi_1$ gilt. Damit wäre $\dim(\varphi) \geq \dim(\tau_1) = 2^k$. Ist $\varphi_L \not\sim 0$, so wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $(\varphi_L)_{an}$ an und erhalten

$$\dim(\varphi) \geq \dim((\varphi_L)_{an}) \geq 2^k.$$

$\square$

2.2.2 Generische Zerfällungstürme

Sei φ eine Form über K. Dann existiert eine Zerlegung

$$\varphi \cong \varphi_0 \perp (i_0 \times \mathbb{H})$$

mit $\varphi_0 = \varphi_{an}$. Setze $K_0 := K$. Zerfällt φ über K, so brechen wir ab. Andernfalls wählen wir einen generischen Nullstellenkörper K_1 von φ_0 und zerlegen

$$\varphi_0 \otimes K_1 \cong \varphi_1 \perp (i_1 \times \mathbb{H})$$

mit $\varphi_1 = (\varphi_0 \otimes K_1)_{an}$. Zerfällt φ_1, so bricht das Verfahren ab. Induktiv setzen wir für $l \geq 2$ dieses Verfahren fort, indem wir einen generischen Nullstellenkörper K_r von φ_{r-1} und eine Zerlegung

$$\varphi_{r-1} \otimes K_r \cong \varphi_r \perp (i_r \otimes \mathbb{H})$$

mit $\varphi_r = (\varphi_{r-1} \otimes K_r)_{an}$ wählen. Falls φ_r zerfällt, brechen wir ab. Ansonsten fahren wir mit $r + 1$ fort. Auf diese Weise erhalten wir einen Körperturm

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_h,$$

eine Familie von Formen φ_r und Wittindizes i_r, so dass

$$\begin{aligned} \varphi &\cong \varphi_0 \perp (i_0 \times \mathbb{H}), \\ \varphi_{r-1} \otimes K_r &\cong \varphi_r \perp (i_r \times \mathbb{H}), \quad r = 1, \ldots, h, \end{aligned}$$

mit $\dim(\varphi_h) \leq 1$ und $i_r > 0$ für $r = 1, \ldots, h$ gilt.

2.2.15 Definition. *Sei φ eine Form über K. Einen wie oben konstruierten Körperturm bezeichnen wir als* generischen Zerfällungsturm *von φ.*

2.2.16 Theorem. *Sei $(K_r \mid 0 \leq r \leq h)$ ein generischer Zerfällungsturm von φ, und seien $i_0, \ldots, i_h$ die zugehörigen Wittindizes und $\varphi_0, \ldots, \varphi_h$ die entsprechenden anisotropen Kerne. Weiterhin sei $\lambda : K \to L^\infty$ eine Stelle und $\mu : K_m \to L^\infty$ eine Fortsetzung von λ mit $m \in \{0, \ldots, h\}$, so dass μ nicht auf K_{m+1} fortgesetzt werden kann, falls $m < h$ ist.*

(1) Besitzt φ gute Reduktion bzgl. λ, so hat φ_m gute Reduktion bzgl. μ und $\mu_*(\varphi_m)$ ist der anisotrope Kern von $\lambda_*(\varphi)$. Der Wittindex von $\lambda_*(\varphi)$ ist $i_0 + \cdots + i_m$.

(2) Ist $c \in D^*_{K_m}(\varphi_m)$, so besitzen $c(\varphi \otimes K_m)$ und $c\varphi_m$ auf jeden Fall gute Reduktion bzgl. μ und $\mu_*(c\varphi_m)$ ist anisotrop.

[Kne76, Theorem 5.1, Seite 78]

Beweis. (1): Da φ gute Reduktion bzgl. λ besitzt, besitzt auch $\varphi \otimes K_m$ gute Reduktion bzgl. μ, und es gilt $\mu_*(\varphi \otimes K_m) \cong \lambda_*(\varphi)$. Nach Satz 2.1.26 hat auch φ_m gute Reduktion bzgl. μ und es gilt

$$\lambda_*(\varphi) \;\cong\; \mu_*(\varphi_m) \perp (i_0 + \cdots + i_m) \times \mathbb{H}.$$

Ist $m < h$, so ist $\mu_*(\varphi)$ nach Satz 2.1.29 (1) anisotrop, da μ nicht auf K_{m+1} fortgesetzt werden kann. Ist $m = h$, so ist $\dim(\varphi_m) \leq 1$ und $\mu_*(\varphi_m)$ trivialerweise anisotrop.

(2): Die Form $c\varphi_m$ stellt die 1 dar. Negiert man die Äquivalenz aus Satz 2.1.29 (1), so sieht man, dass $c\varphi_m$ und somit auch $c(\varphi \otimes K_m)$ gute Reduktion bzgl. μ besitzen und $\mu_*(\varphi_m)$ anisotrop ist. □

Aus dem eben bewiesenen Theorem und Proposition 2.1.28 folgt, dass die anisotropen Kerne $\varphi_0, \ldots, \varphi_h$ und die Wittindizes $i_0, \ldots, i_h$ im Wesentlichen eindeutig durch φ bestimmt sind. Dies rechtfertigt auch das Attribut „generisch“ in Definition 2.2.15.

2.2.17 Korollar. *Seien $(K_r \mid 0 \leq r \leq h)$ und $(K'_r \mid 0 \leq r \leq h')$ generische Zerfällungstürme einer Form φ über K mit anisotropen Kernen $\varphi_0, \ldots, \varphi_h$ bzw. $\varphi'_0, \ldots, \varphi'_{h'}$ und Wittindizes $i_0, \ldots, i_h$ bzw. $i'_0, \ldots, i'_{h'}$. Dann ist $h = h'$ und $i_r = i'_r$ für $r = 0, \ldots, h$. Weiterhin sind die Körper K_r und K'_r äquivalent über K. Bzgl. jeder K-Stelle $\lambda : K_r \to K'_r$ hat die Form φ_r gute Reduktion, und es gilt $\lambda_*(\varphi_r) \cong \varphi'_r$.*

[Kne76, Corollary 5.3, Seite 79]

2.2.18 Definition. *Sei φ eine beliebige Form über K.*

(1) Die Form φ_r heißt r-ter anisotroper Kern *von φ über K_r. Ist der Körper K_r nicht von Bedeutung, oder sind Missverständnisse ausgeschlossen, so verwenden wir auch die Schreibweise* $\ker_r(\varphi)$. *Den Wittindex $i_r(\varphi) := i_r$ nennen wir* r-ten Wittindex *von φ.*

(2) Die natürliche Zahl $h(\varphi) := h$ heißt Höhe *von φ, und jeder zu K_h über K äquivalente Körper wird als* generischer Zerfällungskörper *von φ bezeichnet.*

(3) Ist $h \geq 1$, so heißt jeder zu K_{h-1} über K äquivalente Körper Leitkörper *von φ.*

Es an dieser Stelle auf den Artikel [KM03] von Nikita Karpenko und Alexander Merkurjev hingewiesen. In diesem wird das Minimum der Transzendenzgrade aller generischen Zerfällungskörper einer beliebigen, anisotropen Form φ über K genau berechnet wird. Es gilt

$$\min\{\operatorname{transgrad}_K(L) \mid L \text{ ist generischer Zerfällungskörper von } \varphi\} \;=\; \dim(\varphi) - i_1(\varphi) + 1$$

([KM03, Theorem 4.3, Seite 370]).

2.2.19 Bemerkung. Sei φ eine Form über K, $(K_r \mid 0 \le r \le h)$ ein generischer Zerfällungsturm von φ. Theorem 2.2.16 besagt insbesondere, dass es zu jeder Körpererweiterung L von K ein $r \in \{0, \dots, h\}$ mit $i(\varphi \otimes L) = i(\varphi \otimes K_r)$ gibt. Das bedeutet, dass jeder mögliche Wittindex, den φ über einer beliebigen Körpererweiterung von K annehmen kann, bereits über einem der Körper K_r angenommen wird. △

2.2.20 Beispiel. Seien $X_1, \dots, X_n$ Unbestimmte über K und $L = K(X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Form $\varphi = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ über L. Sei $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner als oder gleich $\frac{n}{2}$ ist. Dann ist φ anisotrop, und es gilt $h(\varphi) = m$ und $i_r(\varphi) = 1$ für alle $r = 1, \dots, m$.

[Kne76, Example 5.1, Seite 80] △

Beweis. Offensichtlich existieren keine Polynome $h_1, \dots, h_s \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$, $s \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{j=1}^{s} X_j h_j^2 = 0$ gilt. Hieraus folgt, dass φ anisotrop über L ist.

Wir konstruieren einen Körperturm

$$L \;=\; L_0 \;\subset\; L_1 \;\subset\; \dots \;\subset\; L_m$$

von algebraischen Körpererweiterungen von L, so dass $i(\varphi \otimes L_r) = r$ für $r = 1, \dots, m$ gilt. Da $i(\varphi \otimes M) \le m$ für alle Körpererweiterungen M von L erfüllt ist, folgt dann, dass tatsächlich $h(\varphi) = m$ und $i_r(\varphi) = 1$ für $r = 1, \dots, m$ gilt.

Für $r = 1, \dots, m$ betrachte den Teilkörper

$$K_r \;:=\; K\Big(X_n, \sqrt{-X_n X_{n-1}}, \dots, X_{n-2r+2}, \sqrt{-X_{n-2r+2} X_{n-2r+1}}\Big)$$

eines algebraischen Abschlusses $\overline{L}$ von L. Weiterhin sei L_r die rein transzendente Körpererweiterung $K_r(X_1, \dots, X_{n-2r})$ in $\overline{L}$. Man sieht leicht, dass

$$\varphi \otimes L_r \;\sim\; \langle X_1, \dots, X_{n-2r} \rangle$$

gilt, und wie bereits oben argumentiert, ist $\langle X_1, \dots, X_{n-2r} \rangle$ anisotrop über L_r. Entsprechend ist $i(\varphi \otimes L_r) = r$. □

Sind K, L und M Körper so, dass L regulär über K und M regulär über L ist, so ist nach [Bos03, Satz 11 (iii), Seite 315] auch M über K regulär. Ist φ also eine n-dimensionale Form über K, die nicht zerfällt, so können wir nach Satz 2.1.22 einen generischen Zerfällungsturm $(K_r \mid 0 \le r \le h)$ konstruieren, so dass K_r für $r = 0, \dots, h-1$ regulär über K ist. Gilt $i_h(\varphi) > 1$ oder hat φ ungerade Dimension, so ist auch K_h regulär. Andernfalls können wir $K_h := K_{h-1}(\sqrt{d})$ mit $[d]^{\square} = d(\varphi)$ wählen (siehe Beispiel 2.1.21).

Sei L eine beliebige Körpererweiterung von K. Wir wollen nun aus $(K_r \mid 0 \le r \le h)$ einen generischen Zerfällungsturm von φ_L konstruieren. Für $r = 0, \dots, h-1$ bezeichnen wir mit

$L \cdot_K K_r$ das freie Kompositum von L und K_r über K. Ist n ungerade oder $i_h(\varphi) > 1$, so sei auch $L \cdot_K K_h$ das freie Kompositum. Ansonsten bezeichnen wir mit $L \cdot_K K_h$ den Körper $(L \cdot_K K_{h-1})(\sqrt{d})$. Liegt in diesem Fall $\sqrt{d} \in L$, so gilt $L \cdot_K K_h = L \cdot_K K_{h-1}$. Natürlich ist $L \cdot_K K_0 = L$.

Sei $\varphi_r = \ker_r(\varphi)$ für $r = 0, \dots, h$, und sei $J \subset \{0, \dots, h\}$ die Menge aller $s \in \{0, \dots, h\}$, so dass

$$\widehat{\varphi_s} \;:=\; \varphi_s \otimes (L \cdot_K K_s) \tag{2.6}$$

anisotrop ist. Natürlich ist $h \in J$. Sei $J = \{r(0), \dots, r(t)\}$, mit $t \geq 0$ und

$$0 \;\leq\; r(0) \;<\; r(1) \;<\; r(2) \;<\; \dots \;<\; r(t) \;=\; h.$$

2.2.21 Satz. *(1) Für alle $s \in \{0, \dots, h\} \setminus J$ ist $L \cdot_K K_{s+1}$ über $L \cdot_K K_s$ äquivalent zu $L \cdot_K K_s$.*

(2) Die Form φ_L zerfällt genau dann, wenn $L \cdot_K K_h$ über L äquivalent zu L ist. In diesem Fall ist $t = 0$.

(3) Nehmen wir an, dass φ_L nicht zerfällt, so ist

$$L \;\subset\; L \cdot_K K_{r(1)} \;\subset\; L \cdot_K K_{r(2)} \;\subset\; \dots \;\subset\; L \cdot_K K_{r(t)}$$

ein generischer Zerfällungsturm von φ_L.

[Kne76, Proposition 5.13, Seite 85]

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für $s \in \{0, \dots, h-1\}$ der Körper $L \cdot_K K_{s+1}$ ein generischer Nullstellenkörper von $\widehat{\varphi_s}$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $L \cdot_K K_{s+1}$ und $L \cdot_K K_s(\varphi_s) \cong (L \cdot_K K_s)(\widehat{\varphi_s})$ über $L \cdot_K K_s$ äquivalent sind. Tatsächlich existiert eine K_s-Stelle λ von K_{s+1} nach $K_s(\varphi_s)$. Da λ auch eine K-Stelle ist, kann λ nach Lemma 2.1.13 zu einer L-Stelle $\mu : L \cdot_K K_{s+1} \to L \cdot_K K_s(\varphi_s)$ fortgesetzt werden. Wir sehen sofort, dass μ eine $(L \cdot_K K_s)$-Stelle ist, denn λ ist eine K_s-Stelle. Da K_{s+1} und $K_s(\varphi_s)$ sogar K-äquivalent sind, erhält man auf analoge Weise eine $(L \cdot_K K_s)$-Stelle von $L \cdot_K K_s(\varphi)_s$ nach $L \cdot_K K_{s+1}$. Folglich ist $L \cdot_K K_{s+1}$ ein generischer Nullstellenkörper von $\widehat{\varphi_s}$.

Liegt s nicht in J, so ist $\widehat{\varphi_s}$ isotrop. Somit sind $(L \cdot_K K_s)(\widehat{\varphi_s})$ und $L \cdot_K K_s$ äquivalent über $L \cdot_K K_s$. Nach dem eben Bewiesenen folgt Behauptung (1), also die $(L \cdot_K K_s)$-Äquivalenz von $L \cdot_K K_{s+1}$ und $L \cdot_K K_s$.

Zerfällt φ_L, dann ist $J = \{h\}$ und $t = 0$. Aus (1) folgt per Induktion, dass $L \cdot_K K_h$ über L äquivalent zu $L \cdot_K K_0 = L$ ist. Gilt andererseits $L \cdot_K K_h \sim_L L$, so zerfällt φ_L, da $\varphi \otimes (L \cdot_K K_h)$ zerfällt. Somit wäre auch Behauptung (2) bewiesen.

Wir nehmen an, φ_L zerfällt nicht. Nach (1) und (2) ist dann $t \geq 1$. Mit F_s bezeichnen wir für $s \in \{0, \dots, t\}$ den Körper $L \cdot_K K_{r(s)}$. Sei ψ_s der anisotrope Kern von $\varphi \otimes F_s$ und $\chi = (\varphi \otimes L)_{an}$. Aus dem bisher Bewiesenen folgt, dass $L \cdot_K K_{r(s)+1}$ für $s = 0, \dots, t-1$ ein generischer Nullstellenkörper von ψ_s ist. Außerdem ist F_{s+1} über $L \cdot_K K_{r(s)+1}$ äquivalent zu $L \cdot_K K_{r(s)+1}$, und somit sind die beiden Körper F_s-äquivalent. Also ist F_{s+1} ein generischer Nullstellenkörper von ψ_s für $s \in \{0, \dots, t-1\}$. Damit ist $(F_s \mid 0 \leq s \leq t)$ ein generischer Zerfällungsturm von ψ_0 über F_0.

Zu zeigen ist noch, dass F_1 ein generischer Nullstellenkörper von χ ist. Nach (1) gilt $F_0 \sim_L L$ und somit $\psi_0 \cong \chi \otimes F_0$. Da F_1 ein generischer Nullstellenkörper von ψ_0 ist, ist F_1 dies auch für $\chi \otimes F_0$. Sei L' eine beliebige Körpererweiterung von L, so dass $\chi \otimes L'$ isotrop ist. Die Körper F_0 und L sind über L äquivalent, und es gilt $L \subset L'$. Folglich existiert eine L-Stelle $\lambda : F_0 \to (L')^\infty$. Es ist $\chi \otimes L'$ isotrop, und χ hat als Form über L natürlich gute Reduktion bzgl. λ. Also lässt sich λ nach Theorem 2.1.29 (1) zu einer Stelle von F_1 nach $(L')^\infty$ fortsetzen. □

2.2.3 Die Leitform

2.2.22 Theorem. *Sei φ eine n-dimensionale, anisotrope Form über K, $n \in \mathbb{N}_0$.*

(1) Ist n gerade, so hat φ genau dann Höhe 1, wenn φ ähnlich einer k-fachen Pfisterform mit $k \geq 1$ ist.

(2) Falls n ungerade ist, hat φ genau dann Höhe 1, wenn φ ähnlich dem reinen Anteil einer k-fachen Pfisterform mit $k \geq 2$ ist.

[Kne76, Theorem 5.8, Seite 81]

Beweis. Wir wissen bereits, dass anisotrope k-fache Pfisterformen mit $k \geq 1$ und der reine Anteil anisotroper k-facher Pfisterformen mit $k \geq 2$ über ihrem Funktionenkörper zerfallen und somit Höhe 1 haben.

Umgekehrt sei φ eine anisotrope Form mit $h(\varphi) = 1$. Insbesondere folgt dann $\dim(\varphi) \geq 2$. Sei n zunächst gerade. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass φ die 1 darstellt, also $\varphi \cong \langle 1\rangle \perp \varphi'$ gilt. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ und $K(X)$ der rationale Funktionenkörper in n Unbestimmten. Da nach Voraussetzung $\varphi \otimes K(\varphi)$ hyperbolisch ist, gilt $\varphi_L(X)\varphi_L \cong \varphi_L$ nach Lemma 2.2.3. Also ist φ streng multiplikativ und somit eine Pfisterform.

Sei nun n ungerade und $n > 1$. Indem wir φ durch eine geeignete ähnliche Form ersetzen können wir annehmen, dass $d(\varphi) = 1$ gilt. Nehmen wir an, φ stellt die 1 dar. Dann existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \langle 1\rangle \perp \varphi'$. Da φ Höhe 1 hat und $d(\varphi \otimes K(\varphi)) = 1$ ist, muss $\varphi \otimes K(\varphi) \sim \langle 1\rangle$ gelten. So folgt $\varphi' \otimes K(\varphi) \sim 0$. Nach Satz 2.2.4 ist φ ähnlich einer Teilform von φ', was aus Dimensionsgründen unmöglich ist. Also ist $1 \notin D_K(\varphi)$ und somit $\tau := \langle 1\rangle \perp (-\varphi)$ nach Lemma 1.2.9 anisotrop.

Sei L eine beliebige Körpererweiterung von K. Es ist $h(\varphi_L) \leq h(\varphi)$. Ist φ_L anisotrop, so folgt aus $\dim(\varphi) > 1$, dass $h(\varphi_L) > 0$ und somit $h(\varphi_L) = 1$ gilt. Indem wir das Obige auf φ_L anstatt auf φ anwenden, sehen wir, dass τ_L anisotrop ist. Ist φ_L isotrop, so folgt $\varphi_L \sim \langle 1\rangle$ und somit $\tau_L \sim 0$. Also ist τ_L für jede Körpererweiterung L von K entweder anisotrop oder hyperbolisch. Es folgt $h(\tau) = 1$. Da τ die 1 darstellt ist τ nach (1) eine Pfisterform. □

Sei φ eine Form über K, die nicht zerfällt. Sei L ein Leitkörper und h die Höhe von φ. Dann hat der $(h-1)$-te anisotrope Kern ψ von φ über L die Höhe 1, weshalb wie eben bewiesen ψ ähnlich einer Pfisterform oder ähnlich dem reinen Anteil einer Pfisterform über L sein muss. Diese Pfisterform bezeichnen wir mit τ. Ist $n = \dim(\varphi)$ gerade, so gilt

$$\tau \;\cong\; a\psi$$

für jedes $a \in D_L^*(\psi)$ (vergleiche mit dem Absatz nach Definition 2.2.8). Ist n ungerade, so existiert ein $a \in L^*$ mit $\tau \cong \langle 1\rangle \perp a\psi$. Nach Lemma 2.2.13 ist $d(a\psi) = d(\psi)\,[a]^\square = -1$. Hieraus folgt

$$\tau \;\cong\; \langle 1\rangle \perp (-d)\psi$$

mit $[d]^{\square} = d(\varphi)$.

2.2.23 Definition. *Wir nennen τ die* Leitform *von φ.*

Sei L' ein weiterer Leitkörper von φ und τ' die Leitform von φ über L'. Dann sind L und L' über K äquivalent, dass heißt es existieren K-Stellen $\lambda : L \to (L')^\infty$ und $\lambda' : L' \to L^\infty$. Aus Proposition 2.1.28 folgt, dass τ bzgl. λ und τ' bzgl. λ' gute Reduktion besitzen, und dass $\lambda_*(\tau) \cong \tau'$ bzw. $\lambda'_*(\tau') \cong \tau$ gilt. Also ist die Leitform im Wesentlichen eindeutig durch φ bestimmt.

Mit Hilfe des Begriffes der Leitform ergibt sich nun aus Satz 2.2.21 unmittelbar das folgende Korollar.

2.2.24 Korollar. *Sei φ eine Form über K, $(K_r \mid 0 \le r \le h)$ ein generischer Zerällungsturm von φ und L eine Körpererweiterung von K, so dass φ_L nicht zerfällt. Die Leitform von φ_L sei eine m-fache Pfisterform, $m \in \mathbb{N}$. Schließlich sei $r \in \{0, \dots, h\}$ maximal, so dass $\varphi \otimes (L \cdot_K K_r)$ nicht zerfällt. Dann ist $\dim(\ker_r(\varphi)) = 2^m$, falls $\dim(\varphi)$ gerade ist. Ist $\dim(\varphi)$ ungerade, so gilt $\dim(\ker_r(\varphi)) = 2^m - 1$.*

[Kne76, Corollary 5.15, Seite 86]

Als nächstes untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Leitform τ einer Form φ und der Diskriminante und der Clifford-Invariante von φ.

2.2.25 Satz. *Sei φ eine Form über K mit $n = \dim(\varphi_{an}) > 1$, L der Leitkörper und τ über L die Leitform von φ.*

(1) Ist n gerade, $d(\varphi) = 1$ und $c(\varphi) = 1$, oder ist n ungerade und $c(\varphi) = 1$, so ist τ eine k-fache Pfisterform mit $k \ge 3$.

(2) Ist n gerade und $d(\varphi) \ne 1$, so gilt

$$\tau \;\cong\; \langle 1, -d(\varphi) \rangle \otimes L.$$

(3) Ist n gerade, $d(\varphi) = 1$ und $c(\varphi) \ne 1$, oder ist n ungerade und $c(\varphi) \ne 1$, so ist τ eine 2-fache Pfisterform. Ist $\tau = \langle\langle b, c \rangle\rangle$ mit $b, c \in L^*$, so gilt

$$c(\varphi) \otimes L \;=\; \left[\left(\frac{-b, -c}{L} \right) \right].$$

[Kne76, Proposition 5.10, Seite 82]

Beweis. Sei $(K_r \mid 0 \le r \le h)$ der generische Zerfällungsturm von φ mit

$$K_0 = K, \quad \varphi_0 = \varphi_{an}, \quad K_r = K_{r-1}(\varphi_{r-1}) \quad \text{und} \quad \varphi_r = (\varphi_{r-1} \otimes K_r)_{an}, \quad r = 1, \dots, h.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $L = K_{h-1}$ gilt.

Sei n ungerade und $\psi := \varphi_{h-1}$. Da φ nicht zerfällt, muss $n \ge 3$ gelten. Dann ist $\tau \cong \langle 1 \rangle \perp (-d)\psi$ mit $[d]^{\square} = d(\varphi)$. Es gilt $\dim(\tau) \ge 2^2$ und somit $d(\tau) = 1$ nach Beispiel 1.2.23. Nach Lemma 2.2.13 gilt $d(-d\psi) = -1$, und aus den Sätzen 1.3.21 (1) und 1.3.22 (1) folgt nun

$$c(\tau) = c(\langle 1 \rangle) \cdot c(-d\psi) \cdot \left[\left(\frac{d(\langle 1 \rangle), d(-d\psi)}{L} \right) \right] = [L] \cdot (c(\varphi) \otimes L) \cdot \left[\left(\frac{1, -1}{L} \right) \right] = c(\varphi) \otimes L.$$

(1): Ist n gerade, so gilt $\tau \cong a\psi$ mit einem $a \in K^*$. Aus Satz 1.3.22 (2) und $d(\psi) = d(\varphi_L) = 1$ folgt dann

$$c(\tau) \;=\; c(\psi) \cdot \left[\left(\frac{a, d(\psi)}{K}\right)\right] \;=\; c(\psi) \;=\; 1.$$

In jedem Fall gilt also $d(\tau) = 1$ und $c(\tau) = 1$. Nach Satz 1.2.22 und Proposition 1.3.25 liegt τ in $I^3(K)$. Es folgt $\dim(\tau) \geq 2^3$.

(2): Sei $r \in \{0, \dots, h\}$ maximal mit $d(\varphi)(K_r^*)^2 \neq 1$. Sofort sehen wir, dass $r \leq h-1$ gelten muss, da n gerade ist. Wir nehmen $\dim(\varphi_r) > 2$ an. Dann ist K_r in K_{r+1} algebraisch abgeschlossen. Dies allerdings steht im Widerspruch zu $d(\varphi)(K_{r+1}^*)^2 = 1$, weshalb $r = h-1$ und $\dim(\psi) = 2$ gelten muss. Aus Lemma 1.1.16 folgt die Ähnlichkeit von ψ und $\langle 1, -d(\varphi)\rangle \otimes L$.

(3): Nach Voraussetzung gilt $c(\varphi) \neq 1$. Sei $r \in \{0, \dots, h\}$ maximal mit $c(\varphi) \otimes K_r = c(\varphi_r) \neq 1$. Sicherlich ist $r \leq h-1$. Dann existiert ein Schiefkörper D über K_r mit $\operatorname{ind}_{K_r}([D]) > 1$ und $c(\varphi_r) = [D]$. Über $K_r(\varphi_r)$ zerfällt D, und $K_r(\varphi_r)$ hat die Form $E(\sqrt{-a})$, wobei E eine rein transzendente Körpererweiterung von K_r ist und $a \in E^* \setminus E^{*2}$ liegt. Da E rein transzendent über K_r ist, muss $\operatorname{ind}_E([D \otimes_{K_r} E]) = \operatorname{ind}_{K_r}([D])$ gelten. Es ist $E(\sqrt{-a})$ ein Zerfällungskörper von D und nach Korollar 1.3.8 teilt der Index $\operatorname{ind}_E([D \otimes_{K_r} E])$ den Grad $[E(\sqrt{-a}) : E] = 2$. Also muss $\dim_E(D \otimes_{K_r} E) = \dim_{K_r}(D) = 4$ gelten. Folglich ist $D = \left(\frac{-b,-c}{K_r}\right)$ mit $b, c \in K_r^*$, und die Pfisterform $\sigma := \langle\langle b, c\rangle\rangle$ hat nach Beispiel 1.3.20 (2) die Clifford-Invariante $[D]$. Aus Proposition 1.3.28 folgt $\sigma \otimes K_r(\varphi_r) \sim 0$. Somit muss φ_r nach Satz 2.2.4 ähnlich einer Teilform von σ sein. Ist $\dim(\varphi)$ ungerade, so folgt

$$4 \;=\; \dim(\sigma) \;>\; \dim(\varphi_r) \;\geq\; \dim(\varphi_{h-1}) \;\geq\; 3$$

und also $\dim(\varphi_r) = 3$. Ist n gerade, so ist φ_{h-1} ähnlich der Leitform τ und nach Voraussetzung gilt $d(\varphi_{h-1}) = 1$. Da aber 2-dimensionale Pfisterformen die Diskriminante -1 haben, muss

$$4 \;=\; \dim(\sigma) \;\geq\; \dim(\varphi_r) \;\geq\; \dim(\varphi_{h-1}) \geq 4$$

gelten. Es folgt $r = h-1$, $\tau \cong \sigma = \langle\langle b, c\rangle\rangle$ und $c(\varphi) \otimes L = c(\varphi_{h-1}) = [\left(\frac{-b,-c}{L}\right)]$. □

2.2.4 Der Grad einer quadratischen Form

Sei φ eine nichthyperbolische Form über K. Wir definieren

$$\operatorname{mad}(\varphi) \;:=\; \min\left\{\dim((\varphi_L)_{an}) > 0 \mid L \text{ ist eine beliebige Körpererweiterung von } K\right\}.$$

Aus den bisherigen Beobachtungen folgt sofort, dass $\operatorname{mad}(\varphi)$ immer eine 2er-Potenz 2^d mit $d \in N_0$ ist. Dabei ist genau dann $d = 0$, wenn $\dim(\varphi)$ ungerade ist. Sei $\dim(\varphi)$ gerade. Dann ist die Leitform von φ eine d-fache Pfisterform. Ist umgekehrt die Leitform von φ eine d-fache Pfisterform, so ist $\operatorname{mad}(\varphi) = 2^d$.

2.2.26 Definition. *Sei φ eine nichthyperbolische Form über K. Dann ist* $\operatorname{mad}(\varphi) = 2^d$ *mit $d \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen* $\deg(\varphi) := d$ *den* Grad *von φ. Ist $\varphi \sim 0$, so setzen wir* $\deg(\varphi) = \infty$.

Insbesondere hat eine anisotrope, k-fache Pfisterform τ immer Grad $\deg(\tau) = k$. Deshalb wollen wir in Zukunft für eine Pfisterform τ abkürzend auch die Schreibweise $\deg(\tau) = k$ verwenden, um deutlich zu machen, dass τ eine anisotrope, k-fache Pfisterform ist.

Nach Definition eines generischen Zerfällungsturms hängt der Grad einer Form offensichtlich nur von ihrer Äquivalenzklasse ab. Die Abbildung

$$\deg : W(K) \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \quad \{\varphi\} \longmapsto \deg(\varphi),$$

ist also wohldefiniert. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Menge

$$J_k(K) \ := \ \{\{\varphi\} \in W(K) \mid \deg(\{\varphi\}) \geq k\}\,.$$

Sicherlich ist $J_0(K) = W(K)$, und wie bereits bemerkt, haben nur die Klassen ungeradedimensionaler Formen den Grad 0. Also gilt $J_1(K) = I(K)$. Wir wollen nun zeigen, dass $J_k(K)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein Ideal von $W(K)$ ist. Als Vorbereitung benötigen wir zunächst den folgenden Satz.

2.2.27 Satz. *Sei φ eine Form über K und L der Leitkörper von φ. Existiert eine Darstellung $\varphi \sim a\tau\perp\psi$ mit einer anisotropen, k-fachen Pfisterform τ, $k \geq 1$, $a \in K^*$ und* $\deg(\psi) \geq k+1$, *so gelten:*

(1) Die Leitform von φ über L ist τ_L.

(2) Gilt sogar $\deg(\psi) \geq k+2$, *so ist $(a\tau)_L \cong (\varphi_L)_{an}$.*

[Kne76, Theorem 6.3, Seite 88]

Beweis. In Teil (a) dieses Beweises zeigen wir zunächst, dass φ tatsächlich Grad k hat, und im zweiten Teil (b) beweisen wir die Behauptungen (1) und (2). Beachte, dass $\dim(\psi)$ gerade ist, da nach Voraussetzung $\deg(\psi) > 0$ gilt.

(a): Zerfällt ψ, so ist $\varphi \sim a\tau$ und die Behauptungen somit trivial, weshalb wir ohne Einschränkung annehmen, dass ψ nicht zerfällt. Sei $(E_i \mid 0 \leq i \leq e)$ ein generischer Zerfällungsturm von ψ. Wir nehmen an, dass $\tau \otimes E_e$ zerfällt. Sei $s \in \{0, \ldots, e-1\}$ maximal mit der Eigenschaft, dass $\tau \otimes E_s$ anisotrop ist. Dann gilt $\tau \otimes E_s(\ker_s(\psi)) \sim 0$. Nach Satz 2.2.4 existiert ein $b \in E_s^*$ mit $b\ker_s(\psi) \subset \tau \otimes E_s$. Da E_{e-1} eine (unter Umständen triviale) Körpererweiterung von E_s ist, folgt hieraus $\deg(\psi) = \deg(\ker_s(\psi)) \leq k$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\tau \otimes E_s$ anisotrop sein. Damit hat $\varphi \otimes E_e$ den anisotropen Kern $(a\tau) \otimes E_e$, und es gilt $\deg(\varphi) \leq k$.

Angenommen, φ habe Grad $m < k$. Sei $(K_j \mid 0 \leq j \leq h)$ ein generischer Zerfällungsturm von φ. Es gelte $\ker_{h-1}(\varphi) \cong b\sigma$ mit $b \in K_{h-1}^*$ und einer m-fachen Pfisterform σ über K_{h-1}. Dann erhalten wir

$$\psi \otimes K_{h-1} \ \sim \ b\sigma\perp(-a)(\tau \otimes K_{h-1}).$$

Die Form auf der rechten Seite hat Dimension $2^m + 2^k < 2^{k+1} \leq 2^{\deg(\psi)}$. Nach Definition des Grads muss $\psi \otimes K_{h-1}$ hyperbolisch sein. Es folgt $b\sigma \sim a(\tau \otimes K_{h-1})$. Da $\dim(\tau) > \dim(\sigma)$ gilt, zerfällt $\tau \otimes K_{h-1}$ und somit auch σ. Dies ist ein Widerspruch zur Anisotropie von σ. Es folgt $\deg(\varphi) = k$.

(b): Es gilt $\psi \otimes K_h \sim (-a\tau) \otimes K_h$. Da nach Voraussetzung $\deg(\psi) > k$ ist, folgt $\psi \otimes K_h \sim 0$ und $\tau \otimes K_h \sim 0$. Sei $s \in \{0, \ldots, h-1\}$ maximal, so dass $\tau \otimes K_s$ anisotrop ist. Wie in Teil (a) folgt aus Satz 2.2.4, dass ein $c \in K_s^*$ mit $c\ker_s(\varphi) \subset \tau \otimes K_s$. Da φ Grad k hat, folgt $s = h-1$ und $\ker_{h-1}(\varphi) \cong c(\tau \otimes K_{h-1})$. Also ist $\tau \otimes K_{h-1}$ die Leitform von φ.

Weiterhin gilt

$$\psi \otimes K_{h-1} \;\sim\; \big(\varphi \perp (-a\tau)\big) \otimes K_{h-1} \;\sim\; \langle c, -a\rangle \otimes (\tau \otimes K_{h-1}).$$

Ist $\deg(\psi) \geq k+2$, so folgt aus $\dim(\langle c,-a\rangle \otimes (\tau \otimes K_{h-1})) = k+1$, dass $\psi \otimes K_{h-1} \sim 0$ gelten muss. Dies bedeutet $\ker_{h-1}(\varphi) \cong a(\tau \otimes K_{h-1})$. □

2.2.28 Theorem. *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $J_k(K)$ ein Ideal von $W(K)$.*

[Kne76, Theorem 6.4, Seite 89]

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für zwei Formen φ_1 und φ_2 über K

$$\deg(\varphi_1 \perp \varphi_2) \;\geq\; \min\{\deg(\varphi_1), \deg(\varphi_2)\} \tag{2.7}$$

gilt. Hieraus folgt, dass $J_k(K)$ abgeschlossen bzgl. der Addition in $W(K)$ ist. Hat φ_1 oder φ_2 ungerade Dimension, oder ist $\varphi_1 \perp \varphi_2 \sim 0$, so ist die Aussage (2.7) trivial. Wir wollen diese Fälle nunmehr ausschließen.

Ist $k = \deg(\varphi_1 \perp \varphi_2)$, so existiert eine Körpererweiterung L von K, ein $a \in L^*$ und eine k-fache Pfisterform τ über L, so dass

$$(\varphi_1 \otimes L \perp \varphi_2 \otimes L)_{an} \cong a\tau$$

gilt. Da jede Körpererweiterung von L auch Körpererweiterung von K und $\deg(\{\mathbb{H}\}) = \infty$ ist, folgt aus der Definition des Grades einer Form

$$\deg(\varphi_i \otimes L) \geq \deg(\varphi_i) \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Deshalb genügt es (2.7) für die Formen $\widehat{\varphi_i} := \varphi_i \otimes L$ zu zeigen. Ist $\deg(\widehat{\varphi_2}) > k$, so folgt nach Satz 2.2.27 aus $\widehat{\varphi_1} \sim a\tau \perp (-\widehat{\varphi_2})$, dass $\widehat{\varphi_1}$ Grad k hat. In jedem Fall gilt also

$$\min\{\deg(\widehat{\varphi_1}), \deg(\widehat{\varphi_2})\} \;\leq\; k \;=\; \deg(\varphi_1 \perp \varphi_2).$$

Also ist $J_k(K)$ abgeschlossen bzgl. Addition. Weiterhin ist $\deg(\mathbb{H}) = \infty$, wie bereits erwähnt, und deswegen $J_k(K)$ sogar eine additive Gruppe.

Da $W(K)$ additiv von 1-dimensionalen Formen $\langle a\rangle$ mit $a \in K^*$ erzeugt wird, und da offensichtlich $\deg(a\varphi) = \deg(\varphi)$ für jede Form φ über K gilt, folgt aus (2.7), dass $J_k(K)$ ein Ideal von $W(K)$ ist. □

Seien $\{\varphi\}$ und $\{\psi\}$ Elemente aus $J_k(K)$ mit $k = \deg(\varphi) < \deg(\psi) = l$. Wir nehmen an, es gilt $\deg(\varphi \perp \psi) > k$. Sei $m = \min\{\deg(\varphi \perp \psi), l\} > k$. Dann liegt die Äquivalenzklasse von $\{\varphi \perp \psi\} \in J_m(K)$. Durch Addition mit $\{-\psi\} \in J_m(K)$ folgt $\{\varphi\} \in J_m(K)$. Dies aber ist unmöglich, da wir $\deg(\varphi) < m$ vorausgesetzt hatten.

2.2.29 Korollar. *Seien φ und ψ Formen über K mit $\deg(\varphi) \neq \deg(\psi)$. Dann gilt*

$$\deg(\varphi \perp \psi) \;=\; \min\{\deg(\varphi), \deg(\psi)\}.$$

[Kne76, Corollary 6.5, Seite 90]

Wie wir wissen, wird die k-te Potenz des Fundamentalideals $I^k(K)$ additiv von den Äquivalenzklassen k-facher Pfisterformen über K erzeugt. Diese liegen aber per Definition alle in $J_k(K)$.

2.2.30 Korollar. *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $I^k(K) \subseteq J_k(K)$.*

[Kne76, Corollary 6.6, Seite 90]

2.2.31 Proposition. *Für beliebige $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt $I^k(K)J_l(K) \subseteq J_{k+l}(K)$.*

[Kne76, Proposition 6.9, Seite 91]

Beweis. Es reicht den Fall $k = 1$ zu beweisen, da dann die Behauptung für beliebiges k sofort durch Induktion folgt. Sei φ eine beliebige, nichthyperbolische Form über K. Wir müssen zeigen, dass für eine beliebige Form ψ über K mit $\{\psi\} \in I(K)$ der Grad von $\chi := \psi \otimes \varphi$ echt größer ist als der Grad von φ. Da $I(K)$ additiv von den 2-fachen Pfisterformen erzeugt wird, können wir ohne Einschränkung von $\psi = \langle 1, -a\rangle$ mit $a \in K^*$ ausgehen. Wir schließen die trivialen Fälle, dass $\dim(\varphi)$ ungerade oder ψ hyperbolisch ist, aus und verfahren per Induktion nach $h(\varphi)$. Für $h(\varphi) = 1$ ist φ_{an} eine Pfisterform und aus der Definition einer Pfisterform folgt sofort

$$\deg(\chi) \;=\; \deg(\langle 1, -a\rangle \otimes \varphi_{an}) \;\geq\; \deg(\varphi_{an}) + 1 \;=\; \deg(\varphi) + 1.$$

Sei nun $h(\varphi) > 1$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass χ nicht zerfällt. Sei L der Leitkörper von χ und τ die Leitform von χ über L. Aus der Definition des Grads einer Form folgt $\deg(\varphi_L) \geq \deg(\varphi)$, weshalb es ausreicht $\deg(\tau) > \deg(\varphi_L)$ zu zeigen. Da außerdem $h(\varphi_L) \leq h(\varphi)$ gilt, können wir K durch L und φ unter Umständen durch eine zu φ ähnliche Form ersetzen, so dass wir uns darauf beschränken können, für den Fall

$$\langle 1, -a\rangle \otimes \varphi \;\sim\; \tau \tag{2.8}$$

mit einer anisotropen Pfisterform τ zu zeigen, dass $\deg(\tau) > \deg(\varphi)$ gilt.

Sei $\tau \otimes K(\varphi)$ zunächst anisotrop. Dann ist

$$(\langle 1, -a\rangle \otimes K(\varphi)) \otimes (\varphi \otimes K(\varphi)) \;\sim\; \tau \otimes K(\varphi),$$

und es gilt $\deg(\tau) = \deg(\tau \otimes K(\varphi))$, $\deg(\varphi) = \deg(\varphi \otimes K(\varphi))$ und $h(\varphi \otimes K(\varphi)) = h(\varphi) - 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $\deg(\tau)$ echt größer ist als $\deg(\varphi)$.

Nun gelte $\tau \otimes K(\varphi) \sim 0$. Nach Satz 2.2.4 existiert ein $b \in K^*$ und eine Form ζ über K mit $b\varphi \perp \zeta \cong \tau$. Wir nehmen an, es ist $\zeta = 0$. Dann folgt aus (2.8), dass $\langle 1, -a, -b\rangle \otimes \varphi \sim 0$ gilt. Da $\varphi \not\sim 0$ vorausgesetzt wurde, ist $\{\langle 1, -a, -b\rangle\} \in W(K)$ ein Nullteiler. Dies allerdings widerspricht Satz 1.2.19, weshalb $\zeta \neq 0$ sein muss. Aus $\dim(\tau) > \dim(\varphi)$ folgt nun $\deg(\tau) > \deg(\varphi)$. □

2.2.32 Korollar. *Sei φ eine ungeradedimensionale Form und ψ eine beliebige Form über K. Dann gilt*

$$\deg(\varphi \otimes \psi) \;=\; \deg(\psi).$$

[Kne76, Corollary 6.10, Seite 91]

Beweis. Hat auch ψ ungerade Dimension oder zerfällt ψ, so ist die Behauptung trivial. Wir wollen diese Fälle also ausschließen und von $\deg(\psi) = k \geq 1$ ausgehen. Ohne Einschränkung können wir $\dim(\varphi_{an}) \geq 3$ annehmen. Es gilt $\varphi \otimes \psi \sim \psi \perp (\varphi \perp \langle -1 \rangle) \otimes \psi$, und die Äquivalenzklasse von $\varphi \perp \langle -1 \rangle$ liegt in $I(K)$. Nach Proposition 2.2.31 hat $(\varphi \perp \langle -1 \rangle) \otimes \psi$ einen echt größeren Grad als ψ. Aus Korollar 2.2.29 folgt somit die Behauptung. □

Knebusch stellte nun in seinem Artikel [Kne76, Question 6.7, Seite 90] die Frage, ob für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die k-te Potenz $I^k(K)$ des Fundamentalideals tatsächlich gleich $J_k(K)$ sei. Diese Frage wurde später, als Knebuschs Theorie der generischen Zerfällung zunehmend an Bedeutung gewann, *Knebusch-Vermutung* genannt. Zu dem Zeitpunkt, da Knebusch diese Vermutung aufstellte, war bereits bekannt, dass $I^2(K) = J_2(K)$ gilt. Außerdem gab es Versuche, dies auch für $n = 3$ zu zeigen. Aber erst vor kurzem schafften es Dmitry Orlov, Alexander Vishik und Vladimir Voevodsky in [OVV00] die Knebusch-Vermutung (zusammen mit der Milnor-Vermutung über quadratische Formen und der Kahn-Rost-Sujatha-Vermutung) zu beweisen. Leider liegt dieser Beweis bisher lediglich als Preprint vor. Wir wollen ihn hier nicht reproduzieren, da dies bereits das Thema einer eigenen (äußerst anspruchsvollen und umfangreichen) Diplomarbeit sein könnte.

2.2.33 Theorem. *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $I^k(K) = J_k(K)$.*

[OVV00, Theorem 4.3, Seite 14]

Abschließend wollen wir das Verhalten des Grades einer Form φ über K unter Körpererweiterungen betrachten. Wie bereits erwähnt folgt aus der Definition des Grades, dass $\deg(\varphi_L) \geq \deg(\varphi)$ für eine beliebige Körpererweiterung L von K gilt. Der folgende Satz behandelt Erweiterungen L von K, für die Ungleichheit gilt.

2.2.34 Satz. *Sei φ eine geradedimensionale Form über K, die nicht zerfällt. Mit L bezeichnen wir den Leitkörper von φ, den wir regulär über K wählen können (siehe Vorbereitungen zu Satz 2.2.21), und sei τ die Leitform von φ über L.*

(1) Für einen beliebigen Körper M über K gilt genau dann $\deg(\varphi_M) > \deg(\varphi)$, wenn τ über dem freien Kompositum $L \cdot_K M$ zerfällt.

(2) Sei M ein generischer Nullstellenkörper einer Form ρ über K mit $\dim(\rho) > 1$. Dann gilt genau dann $\deg(\varphi_M) > \deg(\varphi)$, wenn ρ_L ähnlich einer Teilform von τ ist. Insbesondere ist der natürliche Gruppenhomomorphismus

$$J_k(K)/_{J_{k+1}(K)} \longrightarrow J_k(M)/_{J_{k+1}(M)} \tag{2.9}$$

injektiv für alle k mit $2^k < \dim(\rho)$.

[Kne76, Proposition 6.11, Seite 92]

Beweis. (1): Sei $(K_r \mid 0 \leq r \leq h)$ ein generischer Zerfällungsturm von φ, so dass K_r für $r = 1, \ldots, h-1$ regulär über K ist. Ohne Einschränkung können wir $L = K_{h-1}$ annehmen. Weiterhin sei $\big(M \cdot_K K_{r(s)} \mid 0 \leq s \leq t\big)$ der wie in Satz 2.2.21 (3) eingeführte Zerfällungsturm von φ_M.

Zerfällt $\tau \otimes (M \cdot_K K_{h-1})$, so auch $\ker_{h-1}(\varphi) \otimes (M \cdot_K K_{h-1})$, da τ und $\ker_{h-1}(\varphi)$ ähnlich sind. Folglich muss $r(t-1) < h-1$ gelten. Sei σ die Leitform von φ_M über $M \cdot_K K_{r(t-1)}$. Dann sind σ und $\ker_{r(t-1)}(\varphi_M)$ ähnlich. Wie in (2.6) definiert ist

$$\ker_{r(t-1)}(\varphi_M) \;=\; \ker_{r(t-1)}(\varphi) \otimes (M \cdot_K K_{r(t-1)}).$$

Es folgt

$$\dim(\sigma) \;=\; \dim(\ker_{r(t-1)}(\varphi)) \;>\; \dim(\ker_{h-1}(\varphi)) \;=\; \dim(\tau)$$

und somit $\deg(\varphi_M) > \deg(\varphi)$.

Zerfällt τ über dem freien Kompositum $L \cdot_K M$ nicht, so ist $\ker_{h-1}(\varphi) \otimes (L \cdot_K M)$ anisotrop, und es muss nach Satz 2.2.21 (3) $r(t-1) = h-1$ gelten. Da nunmehr nach Konstruktion des generischen Zerfällungsturm von φ_M die Gleichung $\dim(\ker_{r(t-1)}(\varphi_M)) = \dim(\ker_{h-1}(\varphi))$ gilt, folgt $\deg(\varphi_M) = \deg(\varphi)$.

(2): Da M äquivalent zu $K(\rho)$ ist, müssen auch $L \cdot_K M$ und $L \cdot_K K(\rho) = L(\rho_L)$ äquivalent sein. Ist ρ_L ähnlich einer Teilform von τ, so zerfällt $\tau \otimes L \cdot_K M$. Aus Teil (1) folgt hieraus $\deg(\varphi_M) > \deg(\varphi)$. Ist umgekehrt $\deg(\varphi_M) > \deg(\varphi)$, so zerfällt τ nach (1) über $L \cdot_K M$ und somit auch über $L(\rho_L)$. Nach Satz 2.2.4 ist ρ_L ähnlich einer Teilform von τ.

Ist $\deg(\varphi) = k$ mit $2^k < \dim(\rho)$, so kann ρ keine Teilform von τ sein. Nach dem eben Bewiesenen muss $\deg(\varphi_M) = k = \deg(\varphi)$ gelten. Hieraus folgt die Behauptung über den natürlichen Gruppenhomomorphismus (2.9). □

Kapitel 3

Wittkerne und exzellente Formen

3.1 Wittkerne

Eine wichtige Frage in der Theorie der generischen Zerfällung quadratischer Formen ist die nach den Formen über K, die über dem Funktionenkörper $K(\varphi)$ einer Form φ über K hyperbolisch werden. Ist $\lambda : K \to K(\varphi)$ die natürliche Inklusion, so sind dies gerade die Formen, deren Äquivalenzklassen in $W(K(\varphi)/K) = \ker(\lambda_*)$ liegen. Im Allgemeinen ist es sehr schwer, Wittkerne zu berechnen. Ist φ jedoch eine 2-dimensionale Form oder ein Pfisternachbar, so lässt sich $W(K(\varphi)/K)$ leicht bestimmen.

Im ersten Abschnitt erarbeiten wir uns notwendige Resultate über Pfisterformen, die wir in den folgenden Unterabschnitten und Kapiteln noch benötigen werden. Insbesondere beweisen wir, dass zu zwei Pfisterformen $\tau \not\cong \langle 1 \rangle$ und σ über K mit $\sigma | \tau$ immer eine Pfisterform ρ mit $\tau \cong \sigma \otimes \rho$ existiert. Anschließend definieren wir Pfister-Ideale und erarbeiten uns ein Kriterium dafür, wann ein solches Ideal ein strenges Pfister-Ideal ist. Der letzte Abschnitt behandelt dann die Frage, wann ein Wittkern ein strenges Pfister-Ideal ist. Dabei betrachten wir nur die Spezialfälle, das φ eine Teilform ψ mit $\dim(\varphi) - \dim(\psi) = 1, 2$ enthält so, dass der Wittkern $W(K(\psi)/K)$ ein strenges Pfister-Ideal ist. Als Anwendung betrachten wir den Wittkern $W(K(\varphi)/K)$ einer 4-dimensionalen Form φ.

3.1.1 Hilfsresultate über Pfisterformen

Viele der folgende Resultate sind dem vielfach zitierten Artikel [EL72] entnommen. Während dort vornehmlich mit sehr elementaren Methoden gearbeitet wird, wollen wir die Methoden der generischen Zerfällung verwenden, die wir uns bereits erarbeitet haben. Dadurch werden viele der Beweise wesentlich kürzer und eleganter. Die Grundlage für unsere Beobachtungen bildet der folgende Satz, dessen Beweis im Wesentlichen auf einem Einfall von Karim Becher basiert.

3.1.1 Satz. *Sei τ eine k-fache Pfisterform über K mit $k \geq 1$. Ist σ eine l-fache Pfisterform über K, die τ teilt, $l \in \mathbb{N}_0$, so existiert eine $(k-l)$-fache Pfisterform ρ über K mit $\tau \cong \sigma \otimes \rho$.*

Beweis. Der Fall $l = 0$ ist trivial. Entsprechend nehmen wir $1 \leq l \leq k$ an. Ist τ hyperbolisch und $l < k$, so können wir ρ als hyperbolische, $(k-l)$-fache Pfisterform wählen. Gilt $\tau \sim 0$ und $l = k$, so muss σ bereits hyperbolisch sein und somit aus Dimensionsgründen $\sigma \cong \tau$ gelten.

Wir gehen nun davon aus, dass τ und folglich auch σ anisotrop sind, und verfahren per Induktion nach $m := k - l$. Für $m = 0$ gilt $\tau \cong \sigma \otimes \langle a \rangle$ mit einem $a \in K^*$. Da σ die 1 darstellt, liegt $a \in D_K^*(\tau) = G_K(\tau)$, und es folgt $\tau \cong a\tau \cong \sigma \otimes \langle 1 \rangle$. Also ist $\rho = \langle 1 \rangle$ die gesuchte Pfisterform.

Sei nun $m > 0$ und χ eine Form über K mit $\tau \cong \sigma \otimes \chi$. Wegen

$$\sigma \otimes \chi \;\cong\; (\langle 1 \rangle \perp \sigma_p) \otimes \chi \;\cong\; \chi \perp (\sigma_p \otimes \chi)$$

ist χ eine Teilform von τ. Somit gilt $D_K^*(\chi) \subset D_K^*(\tau) = G_K(\tau)$, und für $b \in D_K^*(\chi)$ folgt $\tau \cong b\tau \cong \sigma \otimes b\chi$ mit $1 \in D_K^*(b\chi)$. Ohne Einschränkung können wir also davon ausgehen, dass eine Zerlegung $\chi \cong \langle 1 \rangle \perp \chi'$ existiert. Sei $a \in D_K^*(\chi')$. Dann ist $\sigma \perp \langle a \rangle$ eine Teilform von τ und ein Pfisternachbar von $\sigma \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$. Da die Funktionenkörper von $\sigma \perp \langle a \rangle$ und $\sigma \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$ nach Satz 2.2.10 über K äquivalent sind, zerfällt $\tau \otimes K(\sigma \otimes \langle\langle a \rangle\rangle)$. Nach Satz 2.2.5 wird τ von der $(l+1)$-fachen Pfisterform $\sigma \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$ geteilt. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt die Existenz einer $(m-1)$-fachen Pfisterform ρ' über K mit $\tau \cong \sigma \otimes \langle\langle a \rangle\rangle \otimes \rho'$. Folglich ist $\rho := \langle\langle a \rangle\rangle \otimes \rho'$ die gesuchte m-fache Pfisterform. □

3.1.2 Korollar. *Sei τ eine k-fache und σ eine l-fache Pfisterform über K mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$. Liegt $a \in D_K^*(\tau \otimes \sigma_p)$, so existiert eine $(l-1)$-fache Pfisterform ρ über K, so dass*

$$\tau \otimes \sigma \;\cong\; \tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle \otimes \rho$$

gilt.

Beweis. Sei zunächst $\tau \otimes \sigma$ hyperbolisch. Ist $l = 1$ und τ anisotrop, so muss $\sigma \cong \langle 1, -1 \rangle$ gelten. Somit gilt $-a \in D_K(\tau) = G_K(\tau)$, und es folgt

$$\tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle \;\cong\; \tau \perp a\tau \;\cong\; \tau \perp -\tau \;\cong\; \tau \otimes \langle 1, -1 \rangle \;\cong\; \tau \otimes \sigma.$$

Also können wir $\rho = \langle 1 \rangle$ wählen. Ist τ anisotrop und $l > 1$, so wählen wir ρ als $(l-1)$-fache hyperbolische Pfisterform. Dann ist $\tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle \otimes \rho$ hyperbolisch und die Behauptung für diesen Fall bewiesen. Ist τ hyperbolisch so folgt die Behauptung mit jeder beliebigen $(l-1)$-fachen Pfisterform ρ.

Sei nun $\tau \otimes \sigma$ anisotrop. Es existiert eine Zerlegung $\tau \otimes \sigma \cong \tau \perp (\tau \otimes \sigma_p)$. Also ist $\tau \perp \langle a \rangle$ eine Teilform von $\tau \otimes \sigma$ und zudem ein Pfisternachbar der Form $\tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$. Die Funktionenkörper von $\tau \perp \langle a \rangle$ und $\tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$ sind äquivalent, und es gilt $\dim(\tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle) \geq 2$, weshalb $(\tau \otimes \sigma) \otimes K(\tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle)$ zerfällt. Nach Satz 2.2.5 wird $\tau \otimes \sigma$ von $\tau \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$ geteilt, und aus Satz 3.1.1 folgt die Behauptung. □

3.1.3 Korollar. *Sei σ eine l-fache Pfisterform über K, $l \geq 1$, und $b \in D_K^*(\sigma_p)$. Dann existiert eine $(l-1)$-fache Pfisterform ρ über K, so dass $\sigma \cong \langle\langle b \rangle\rangle \otimes \rho$ gilt.*

Beweis. Wende das vorherige Korollar mit $\tau = \langle 1 \rangle$ an. □

3.1.4 Lemma. *Sei $\sigma := \langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_k \rangle\rangle =: \tau$ mit $a_i, b_i \in K^*$ für $i = 1, \ldots, k$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $c \in K^*$ mit $\sigma \cong \langle\langle a_1, \ldots, a_{k-1}, c \rangle\rangle$ und $\tau \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_{k-1}, c \rangle\rangle$.*

[Ara75, Lemma 1.7, Seite 454]

Beweis. Sei $\sigma_0 := \langle\langle a_1, \ldots, a_{k-1}\rangle\rangle$ und $\tau_0 := \langle\langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle\rangle$. Dann gilt nach Voraussetzung und dem Kürzungssatz von Witt 1.1.17 $(\sigma_0)_p \perp a_k\sigma_0 \cong (\tau_0)_p \perp b_k\tau_0$. Hieraus folgt, dass die Form $\varphi := ((\sigma_0)_p \perp -(\tau_0)_p) \perp (a_k\sigma_0 \perp -b_k\tau_0)$ hyperbolisch ist. Wegen $\dim(a_k\sigma_0 \perp -b_k\tau_0) > \frac{1}{2}\dim(\varphi)$ muss $a_k\sigma_0 \perp -b_k\tau_0$ isotrop sein. Dies bedeutet, dass ein $c \in D_K^*(a_k\sigma_0) \cap D_K^*(b_k\tau_0)$ existiert. Es folgt $a_kc \in D_K^*(\sigma_0) = G_K(\sigma_0)$ und $b_kc \in D_K^*(\tau_0) = G_K(\tau_0)$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\tau_0 \otimes \langle 1, c\rangle \;\cong\; \tau_0 \otimes \langle 1, b_k\rangle \;\cong\; \tau \;\cong\; \sigma \;\cong\; \sigma_0 \otimes \langle 1, a_k\rangle \;\cong\; \sigma_0 \otimes \langle 1, c\rangle.$$

□

3.1.2 Pfister-Ideale

3.1.5 Definition. *Sei M eine Menge k-facher Pfisterformen über K und $l \in \mathbb{N}_0$. Die Menge M bzw. ihre Elemente heißen* l-verbunden, *falls eine l-fache Pfisterform σ über K und zu jedem $\tau \in M$ eine $(k-l)$-fache Pfisterformen ρ_τ über K mit $\tau \cong \sigma \otimes \rho_\tau$ existiert. Die Form σ heißt dann* l-Verbindung. *Ist zusätzlich M nicht $(l+1)$-verbunden, so heißt die natürliche Zahl* $\mathrm{link}(M) := l$ Verbindungszahl *von M. Ist $\mathrm{link}(M) \geq k-1$, so sagen wir nur, M sei* verbunden.

Eine Menge beliebiger k-facher Pfisterformen $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ ist immer 0-verbunden, da trivialerweise $\langle 1\rangle | \tau_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

3.1.6 Satz. *Seien τ_1 und τ_2 k-fache Pfisterformen über K mit $k \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $\varphi := \tau_1 \perp -\tau_2$. Dann sind τ_1 und τ_2 genau dann l-verbunden, wenn $i(\varphi) \geq 2^l$ ist. Gilt weiterhin $l = \mathrm{link}(\tau_1, \tau_2)$, so folgt $i(\varphi) = 2^l$.*

[EL72, Proposition 4.4, Seite 197]

Beweis. Zunächst nehmen wir an, τ_1 und τ_2 seien l-verbunden. Sei σ eine l-Verbindung von τ_1 und τ_2. Dann gilt $\tau_i \cong \sigma \otimes \rho_i$ für $i = 1, 2$ mit geeigneten $(k-l)$-fachen Pfisterformen ρ_1 und ρ_2 über K. Es folgt

$$\varphi \;\cong\; \sigma \otimes (\langle 1\rangle \perp (\rho_1)_p) \perp -\sigma \otimes (\langle 1\rangle \perp (\rho_2)_p) \;\cong\; (\sigma \otimes \mathbb{H}) \perp \sigma \otimes ((\rho_1)_p \perp -(\rho_2)_p) \tag{3.1}$$

und somit $i(\varphi) \geq 2^l$.

Es gelte umgekehrt $i(\varphi) \geq 2^l$. Wir führen Induktion nach l. Ist $l = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $l > 0$ und die Behauptung für $l-1$ bereits bewiesen. Wegen $i(\varphi) > 2^{l-1}$ sind τ_1 und τ_2 also $(l-1)$-verbunden. Sei σ_0 eine entsprechende $(l-1)$-Verbindung von τ_1 und τ_2, und sei $\tau_i \cong \sigma_0 \otimes \rho_i$ für $i = 1, 2$ mit $(k-l+1)$-fachen Pfisterformen ρ_1 und ρ_2 über K. Wie in (3.1) erhalten wir

$$\varphi \;\cong\; (2^{l-1} \times \mathbb{H}) \perp \big((\sigma_0 \otimes (\rho_1)_p) \perp -(\sigma_0 \otimes (\rho_2)_p)\big).$$

Allerdings hatten wir angenommen, dass $i(\varphi) \geq 2^l$ gilt. Also muss ein $c \in D_K^*(\sigma_0 \otimes (\rho_1)_p) \cap D_K^*(\sigma_0 \otimes (\rho_2)_p)$ existieren. Wenden wir Korollar 3.1.2 gleichzeitig auf $\tau_1 \cong \sigma_0 \otimes \rho_1$ und $\tau_2 \cong \sigma_0 \otimes \rho_2$ an, so folgt die Existenz zweier $(k-l)$-facher Pfisterformen μ_1 und μ_2 über K, für die $\tau_i \cong \sigma_0 \otimes \langle 1, c\rangle \otimes \mu_i$ gilt, $i = 1, 2$. Damit ist $\sigma := \sigma_0 \otimes \langle 1, c\rangle$ die gesuchte l-Verbindung.

Sei schließlich $l = \mathrm{link}(\tau_1, \tau_2)$ und die Formen σ, ρ_1 und ρ_2 wie im ersten Teil des Beweises. Dann folgt aus dem vorherigen Absatz, dass die Form $\chi := (\sigma \otimes (\rho_1)_p) \perp -(\sigma \otimes (\rho_2)_p)$ anisotrop ist, da man ansonsten zeigen könnte, dass $\mathrm{link}(\tau_1, \tau_2) > l$ gilt. Folglich ist $\varphi \cong (2^l \times \mathbb{H}) \perp \chi$ die Wittzerlegung von φ und deshalb $i(\varphi) = 2^l$. □

3.1.7 Satz. *Seien τ und σ jeweils k-fache Pfisterformen über K, $k \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in K^*$. Dann ist der Wittindex der Form $\varphi := x\tau \perp y\sigma$ entweder 0 oder genau 2^l mit $l = \mathrm{link}(\tau, \sigma)$.*

[EL72, Theorem 4.5, Seite 198]

Beweis. Ist φ anisotrop, so ist die Behauptung trivial. Entsprechend gehen wir davon aus, dass φ isotrop ist.

1. Fall: Die Form τ ist isotrop.
Ist auch σ isotrop, so ist φ hyperbolisch und somit $i(\varphi) = 2^k$. In diesem Fall gilt aber auch $\mathrm{link}(\tau, \sigma) = k$. Ist σ anisotrop, so gilt $i(\varphi) = 2^{k-1}$, da τ hyperbolisch ist. Ist ρ eine beliebige $(k-1)$-fache Pfisterform, die σ teilt, so ist $\rho \perp -\rho \cong \tau$. Sofort folgt $\mathrm{link}(\tau, \sigma) = k - 1$, da σ anisotrop ist.

2. Fall: Beide Formen τ und σ sind anisotrop.
Da φ isotrop ist, existiert ein $a \in D_K(\tau)$ und ein $b \in D_K(\sigma)$, so dass $xa + yb = 0$ bzw. $xa = -yb$ gilt. Da τ und σ anisotrop sind, gilt $a, b \neq 0$. Wir erhalten

$$xa(\tau \perp -\sigma) \;\cong\; xa\tau \perp yb\sigma \;\cong\; x\tau \perp y\sigma \;=\; \varphi,$$

da a und b jeweils Ähnlichkeitsfaktoren von τ bzw. σ sind. Nach Satz 3.1.6 gilt $i(\varphi) = 2^l$ mit $l = \mathrm{link}(\tau, \sigma)$. □

Bevor wir uns nun den Pfister-Idealen zuwenden, wollen wir noch ein paar Schreibweisen vereinbaren, die uns das Formulieren der folgenden Resultate wesentlich vereinfachen werden. Sei $U \subset W(K)$ ein beliebige Teilmenge des Wittrings von K. Ist φ eine Form über K, deren Äquivalenzklasse in U liegt, so schreiben wir

$$\varphi \;\Subset\; U.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen aller k-fachen Pfisterformen, $k \in \mathbb{N}_0$, bezeichnen wir mit

$$P_k(K) \;:=\; \{\{\tau\} \in W(K) \mid \tau_{an} \text{ ist eine } k\text{-fache Pfisterform}\} \cup \{0\}.$$

Weiterhin definieren wir die Mengen

$$GP_k(K) \;:=\; \{\{\varphi\} \in W(K) \mid \varphi_{an} \text{ ist ähnlich einer } k\text{-fachen Pfisterform}\} \cup \{0\}$$

sowie

$$P(K) \;:=\; \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k(K) \qquad \text{und} \qquad GP(K) \;:=\; \bigcup_{k=0}^{\infty} GP_k(K).$$

3.1.8 Definition. *Sei $N \subset \mathbb{N}$ eine beliebige Teilmenge der natürlichen Zahlen.*

(1) Ein Ideal $J \subset W(K)$ heißt N-Pfister-Ideal, *wenn J von Äquivalenzklassen von Pfisterformen über K erzeugt wird, deren Grad in N liegt. Ist $N = \{k\}$, so nennen wir J vereinfachend ein* k-Pfister-Ideal.

(2) Das Ideal J heißt strenges N-Pfister-Ideal, *falls es zu jeder Klasse $0 \neq \{\varphi\} \in J$ eine Darstellung $\varphi_{an} \cong a_1\tau_1 \perp \ldots \perp a_n\tau_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in K^*$ und anisotropen $\tau_i \Subset J \cap P_{k_i}(K)$, $k_i \in N$, gibt.*

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $I^k(K)$ nach Satz 1.2.24 ein k-Pfister-Ideal. Da $I^k(K)$ von den Äquivalenzklassen aller k-fachen Pfisterformen über K erzeugt wird, ist $I^k(K)$ sogar das größte k-Pfister-Ideal in $W(K)$. Beachte, dass wir in Definition 3.1.8 den Fall $k = 0$ ausgeschlossen haben. Die einzige 0-fache Pfisterform über K ist $\langle 1\rangle$, und $\{\langle 1\rangle\}$ ist das Einselement von $W(K)$. Ein Ideal von $W(K)$, dass $\{\langle 1\rangle\}$ enthält muss also bereits gleich $W(K)$ sein. Ferner ist zu beachten, dass nach der vorherigen Definition das Nullideal $(0) \subset W(K)$ für jede Menge $N \subset \mathbb{N}$ ein strenges N-Pfister-Ideal ist.

Im Folgenden wollen wir uns eine Charakterisierung von strengen k-Pfister-Idealen erarbeiten. Dazu benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

3.1.9 Lemma. *Sei $(0) \neq J \subset W(K)$ ein k-Pfister-Ideal, $k \in \mathbb{N}$, so dass*

(i) je zwei k-fache Pfisterformen mit Äquivalenzklasse in J verbunden sind und

(ii) jede $(k+1)$-fache Pfisterform $\tau \Subset J$ von einer k-fachen Pfisterform $\sigma \Subset J$ geteilt wird.

Weiterhin sei $\varphi \cong a_1\tau_1\perp\ldots\perp a_n\tau_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in K^*$ und anisotropen $\tau_i \Subset J \cap P_k(K)$. Ist $b_1 \in D_K^*(\varphi)$, dann existieren $b_2, \ldots, b_n \in K^*$ und anisotrope $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \Subset J \cap P_k(K)$, so dass $\varphi \cong b_1\sigma_1\perp\ldots\perp b_n\sigma_n$ gilt.

[ELW79, Lemma 3.10, Seite 226]

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ ist trivial, da hier $b_1 = a_1x$ mit $x \in D_K^*(\tau_1)$ gilt. Es folgt $b_1\tau_1 = a_1x\tau_1 \cong a_1\tau_1 \cong \varphi$.

$n = 2$: In diesem Fall ist $b_1 = a_1x_1 + a_2x_2$ mit $x_i \in D_K^*(\tau_i) \cup \{0\}$. Zunächst gelte $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$. Ohne Einschränkung nehmen wir $x_2 = 0$ an. Dann liegt $x_1 \in D_K^*(\tau_1) = G_K(\tau_1)$, und es folgt $b_1\tau_1 \cong a_1x_1\tau_1 \cong a_1\tau_1$ und weiter $\varphi \cong b_1\tau_1\perp a_2\tau_2$.

Für $i = 1, 2$ gelte nun $x_i \in D_K^*(\tau_i) = G_K(\tau_i)$. Das heißt, es ist $\varphi \cong a_1x_1\tau_1\perp a_2x_2\tau_2$. Folglich können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $b_1 = a_1 + a_2$ ist. Sei μ eine $(k-1)$-Verbindung von τ_1 und τ_2, und seien $c_1, c_2 \in K^*$ mit $\tau_i \cong \langle\langle c_i\rangle\rangle \otimes \mu$. Setze $c := c_1c_2$. Dann gilt nach Lemma 1.1.16

$$\begin{aligned}\psi := a_1\langle\langle c_1\rangle\rangle\perp a_2\langle\langle c_2\rangle\rangle &\cong \langle b_1, a_1a_2b_1\rangle\perp\langle a_1c_1, a_2c_2\rangle \\ &\sim \langle b_1, -b_1c\rangle\perp\langle b_1c, a_1a_2b_1, a_1c_1, a_2c_2\rangle \\ &\cong b_1(\langle\langle -c\rangle\rangle\perp c\langle 1, a_1b_1c_2, a_2b_1c_1, a_1a_2c\rangle). \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Setze $\rho := \langle\langle a_1b_1c_2, a_2b_1c_1\rangle\rangle$ und $\pi := \langle\langle -c\rangle\rangle \otimes \mu$. Durch Multiplizieren von (3.2) mit μ erhalten wir

$$\varphi \sim b_1\big(\pi\perp c(\rho \otimes \mu)\big).$$

Weiterhin gilt

$$\tau_1\perp -\tau_2 \cong (\langle\langle c_1\rangle\rangle \otimes \mu)\perp -(\langle\langle c_2\rangle\rangle \otimes \mu) \sim c_1\langle\langle -c\rangle\rangle \otimes \mu \cong c_1\pi,$$

und aus $\tau_1, \tau_2 \Subset J$ folgt dann $\pi \Subset J$ und somit $\{\rho \otimes \mu\} = \{b_1c\varphi\} \ominus \{c\pi\} \in J$. Nach Voraussetzung (ii) existiert eine k-fache Pfisterform ϑ mit Äquivalenzklasse in J und ein $d \in K^*$, so dass $\rho \otimes \mu \cong \langle\langle d\rangle\rangle \otimes \vartheta$ gilt, und nach Voraussetzung (i) existiert eine $(k-1)$-Verbindung ν von π und ϑ. Sei $y \in K^*$ mit $\vartheta \cong \langle\langle y\rangle\rangle \otimes \nu$. Es sind μ und ν jeweils $(k-1)$-fache Pfisterformen, die beide die k-fache Pfisterform π teilen. Nach Lemma 3.1.4 existiert ein $x \in K^*$ mit

$\pi \cong \langle\langle x \rangle\rangle \otimes \mu \cong \langle\langle x \rangle\rangle \otimes \nu$. Aus $\langle\langle x \rangle\rangle \otimes \mu \cong \langle\langle -c \rangle\rangle \otimes \mu$ folgt über Witt's Kürzungssatz $x\mu \cong -c\mu$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned} b_1\varphi \sim \pi \perp c(\mu \otimes \rho) &\cong (\langle\langle x \rangle\rangle \otimes \nu) \perp -x(\mu \otimes \rho) \\ &\cong (\langle\langle x \rangle\rangle \perp -x\langle\langle d, y \rangle\rangle) \otimes \nu \\ &\cong (\langle\langle x \rangle\rangle \perp -x\langle\langle y \rangle\rangle \perp -xd\langle\langle y \rangle\rangle) \otimes \nu \\ &\sim (\langle\langle -xy \rangle\rangle \otimes \nu) \perp -xd\vartheta. \end{aligned}$$

Da die Äquivalenzklassen von φ und ϑ in J liegen, gilt dies auch für $\sigma_1 := \langle\langle -xy \rangle\rangle \otimes \nu$. Setze $b_2 := -b_1xd$ und $\sigma_2 := \vartheta$. Dann ist $\varphi \sim b_1\sigma_1 \perp b_2\sigma_2$, und aus Dimensionsgründen gilt sogar Isometrie.

$n > 2$: Sei $b_1 \in D_K^*(\varphi)$, und setze $\psi := a_1\tau_1 \perp \ldots \perp a_{n-1}\tau_{n-1}$. Dann existieren $c_1 \in D_K^*(\psi) \cup \{0\}$ und $c_2 \in D_K^*(a_n\tau_n) \cup \{0\}$ mit $b_1 = c_1 + c_2$. Ist $c_1 = 0$, so folgt die Behauptung sofort, da $b_1\tau_n = c_2\tau_n \cong a_n\tau_n$ gilt. Sei also $c_1 \neq 0$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren $b_2, \ldots, b_{n-1} \in K^*$ und anisotrope k-fache Pfisterformen $\rho, \sigma_2 \ldots, \sigma_{n-1} \Subset J$, so dass

$$\psi \cong c_1\rho \perp b_2\sigma_2 \perp \ldots \perp b_{n-1}\sigma_{n-1}$$

gilt. Betrachte die Form $\chi := c_1\rho \perp a_n\tau_n$. Es ist $b_1 \in D_K^*(\chi)$, und nach dem vorherigen Fall existiert ein $b_n \in K^*$ und anisotrope Pfisterformen $\sigma_1, \sigma_n \Subset J \cap P_k(K)$, so dass $\chi \cong b_1\sigma_1 \perp b_n\sigma_n$ gilt. Sofort folgt $\varphi \cong b_1\sigma_1 \perp \ldots \perp b_n\sigma_n$. □

3.1.10 Theorem. *Für ein k-Pfister-Ideal $J \subset W(K)$, $k \in \mathbb{N}$, sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) Es ist J ein strenges k-Pfister-Ideal.

(2) Je zwei k-fache Pfisterformen mit Äquivalenzklassen in J sind verbunden, und jede $(k+1)$-fache Pfisterform $\tau \Subset J$ wird von einer k-fachen Pfisterform $\sigma \Subset J$ geteilt.

(3) Je zwei k-fache Pfisterformen mit Äquivalenzklassen in J sind verbunden, und für alle $l > k$ wird jede l-fache Pfisterform $\tau \Subset J$ von einer k-fachen Pfisterform $\sigma \Subset J$ geteilt.

[ELW79, Theorem 3.1, Seite 224]

Beweis. Die Implikation (3) ⇒ (2) ist trivial. Weiterhin ist die Behauptung für $J = (0)$ trivial, weshalb wir für die folgenden Beobachtungen $J \neq (0)$ voraussetzen.

(1) ⇒ (3): Sei J ein strenges k-Pfister-Ideal, und seien $\tau_1, \tau_2 \Subset J$ jeweils k-fache Pfisterformen. Da der anisotrope Kern jeder Form mit Äquivalenzklasse in J nach Definition 3.1.8 (2) entweder Dimension 0 oder eine Dimension haben muss, die durch 2^k teilbar ist, und da $\dim((\tau_1 \perp -\tau_2)_{an}) < 2^{k+1}$ ist, muss $\dim((\tau_1 \perp -\tau_2)_{an}) \leq 2^k$ gelten. Aus Satz 3.1.6 folgt, dass τ_1 und τ_2 verbunden sind.

Sei $\tau \Subset J$ eine l-fache Pfisterform mit $l > k$. Ist τ hyperbolisch, so wird τ trivialerweise von jeder k-fachen Pfisterform geteilt. Gehen wir also von $\tau \not\sim 0$ aus. Nach Definition 3.1.8 (2) existiert eine Darstellung $\tau \cong a_1\sigma_1 \perp \ldots \perp a_n\sigma_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in K^*$ und anisotropen k-fachen Pfisterformen $\sigma_i \Subset J$ gilt. Da τ eine Pfisterform ist und $a_1 \in D_K^*(\tau)$ liegt, folgt $a_1\tau \cong \tau$. Also gilt $\sigma_1 \subset \tau$. Es folgt, dass $\tau \otimes K(\sigma_1)$ zerfällt und somit $\sigma_1 | \tau$ gilt.

(2) ⇒ (1): Sei $0 \not\sim \varphi \Subset J$ anisotrop über K. Dann existiert eine Darstellung

$$\varphi \sim \psi := a_1\tau_1 \perp \ldots \perp a_s\tau_s$$

mit anisotropen k-fachen Pfisterformen $\tau_1, \ldots, \tau_s$, deren Äquivalenzklassen in J liegen, und einem minimalen $s \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass ψ anisotrop ist. Für $s = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $s > 1$. Wir nehmen zunächst an, ψ sei isotrop. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r < s$ und ein Element $b_1 \in K^*$, so dass $b_1 \in D_K^*(a_1\tau_1 \perp \ldots \perp a_r\tau_r)$ und $-b_1 \in D_K^*(a_{r+1}\tau_{r+1} \perp \ldots \perp a_s\tau_s)$ liegt. Nach Lemma 3.1.9 existieren dann $b_2, \ldots, b_r, b_{r+2}, \ldots, b_s \in K^*$ und anisotrope k-fache Pfisterformen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \Subset J$, so dass

$$\begin{aligned} a_1\tau_1 \perp \ldots \perp a_r\tau_r &\cong b_1\sigma_1 \perp \ldots \perp b_r\sigma_r \qquad \text{und} \\ a_{r+1}\tau_{r+1} \perp \ldots \perp a_s\tau_s &\cong -b_1\sigma_{r+1} \perp b_{r+2}\sigma_{r+2} \perp \ldots \perp a_s\sigma_s \end{aligned}$$

gilt. Durch Addition erhalten wir

$$\varphi \sim b_1(\sigma_1 \perp -\sigma_{r+1}) \perp (b_2\sigma_2 \perp \ldots \perp b_r\sigma_r \perp b_{r+2}\sigma_{r+2} \perp \ldots \perp b_s\sigma_s).$$

Da nach Voraussetzung σ_1 und σ_{r+1} verbunden sind, existieren $c, d \in K^*$ und eine $(k-1)$-fache Pfisterform ρ mit $\sigma_1 \cong \langle\langle c \rangle\rangle \otimes \rho$ und $\sigma_{r+1} \cong \langle\langle d \rangle\rangle \otimes \rho$. Es folgt $\sigma_1 \perp -\sigma_{r+1} \sim c\langle\langle -cd \rangle\rangle \otimes \rho$. Dies bedeutet aber, dass φ bereits äquivalent zu einer Linearkombination bestehend aus $s-1$ Pfisterformen vom Grad k ist, ein Widerspruch zur Minimalität von s. Also muss ψ anisotrop sein und $\varphi \cong \psi$ gelten. □

3.1.3 Wittkerne

Wittkerne hatten wir bereits in Unterabschnitt 2.1.4 eingeführt. Da dieser Begriff bisher jedoch keine nennenswerte Verwendung gefunden hat, wollen wir die Definition hier kurz wiederholen. Sei L eine Körpererweiterung von K und $\lambda : K \to L$ die zugehörige Einbettung. Dann existiert ein natürlicher Ringhomomorphismus

$$\lambda_* : W(K) \longrightarrow W(L), \quad \{\varphi\} \longmapsto \{\varphi_L\}.$$

3.1.11 Definition. *Der Kern von λ_* heißt* Wittkern von L über K *und wird mit $W(L/K)$ bezeichnet.*

Ist φ ein Pfisternachbar der anisotropen k-fachen Pfisterform τ über K, $k \in \mathbb{N}$, so können wir leicht den Wittkern von $K(\varphi)$ über K berechnen. Nach Satz 2.2.10 sind $K(\varphi)$ und $K(\tau)$ äquivalent. Sei $0 \neq \{\psi\} \in W(K(\varphi)/K)$. Dann folgt $\psi_{an} \otimes K(\tau) \sim 0$. Nach Satz 2.2.5 existiert eine Form χ über K mit

$$\psi_{an} \cong \tau \otimes \chi. \tag{3.3}$$

Dies bedeutet $\{\psi\} \in (\{\tau\}) \subset W(K)$, dabei ist $(\{\tau\})$ das von $\{\tau\}$ erzeugte Hauptideal von $W(K)$. Umgekehrt gilt offensichtlich $(\{\tau\}) \subset W(K(\varphi)/K)$. Insbesondere folgt aus (3.3) der folgende Satz.

3.1.12 Satz. *Ist φ ein Pfisternachbar der anisotropen k-fachen Pfisterform τ über K, $k \in \mathbb{N}$, so ist der Wittkern von $K(\varphi)$ über K gegeben durch das strenge k-Pfister-Ideal $W(K(\varphi)/K) = (\{\tau\}) \subset W(K)$.*

Im Folgenden wollen wir uns damit beschäftigen, welche Gestalt Wittkerne von Funktionenkörpern quadratischer Formen haben können. Dies ist jedoch ein weitgehend ungelöstes Problem, zu dem es nur wenige allgemeine Resultate gibt. Wir wollen den Spezialfall einer Form φ untersuchen, die eine Teilform ψ der Dimension $\dim(\varphi) - 1$ enthält, so dass der Wittkern $W(K(\psi)/K)$ ein strenges k-Pfister-Ideal ist, $k \in \mathbb{N}$.

3.1.13 Lemma. *Sei ψ eine Teilform der Form φ über K mit $\dim(\psi) \geq 2$. Dann gilt*

$$W(K(\varphi)/K) \ \subset \ W(K(\psi)/K).$$

[Fit83, Lemma 1.1, Seite 91]

Beweis. Ist ψ isotrop, so ist nach Voraussetzung auch φ isotrop, weshalb $K(\varphi) \sim_K K \sim_K K(\psi)$ gilt und die Behauptung trivial ist. Sei nun ψ anisotrop. Da $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop ist, existiert eine K-Stelle $\lambda : K(\varphi) \to K(\psi)^\infty$. Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

3.1.14 Proposition. *Seien φ und ψ anisotrope Formen über K mit $\dim(\psi) \geq 2$ und $\varphi \cong \psi \perp \langle x \rangle$ für ein $x \in K^*$. Ist $W(K(\psi)/K)$ ein strenges k-Pfister-Ideal, $k \in \mathbb{N}$, so gelten:*

(1) Der Wittkern $W(K(\varphi)/K)$ ist ein $\{k, k+1\}$-Pfister-Ideal.

(2) Ist $\tau \Subset W(K(\varphi)/K)$ eine l-fache Pfisterform, $l \geq k+1$, so existiert eine $(k+1)$-fache Pfisterform $\sigma \Subset W(K(\varphi)/K)$, die τ teilt.

[Fit83, Proposition 1.2, Seite 91]

Beweis. Da die Funktionenkörper ähnlicher Formen isomorph sind, können wir ohne Einschränkung $1 \in D_K(\psi)$ annehmen. Ferner folgt aus $\dim(\psi) \geq 2$ und der Anisotropie von ψ, dass $W(K(\psi)/K) \neq (0)$ gilt.

In Lemma 3.1.13 hatten wir gezeigt, dass $W(K(\varphi)/K) \subset W(K(\psi)/K)$ liegt. Sei $0 \not\sim \chi \Subset W(K(\varphi)/K)$ anisotrop. Ohne Einschränkung nehmen wir wieder $1 \in D_K(\chi)$ an. Da χ auch in $W(K(\psi)/K)$ liegt und $W(K(\psi)/K)$ nach Voraussetzung ein strenges k-Pfister-Ideal ist, existiert eine Darstellung

$$\chi \ \cong \ a_1\tau_1 \perp \ldots \perp a_n\tau_n$$

mit anisotropen $\tau_i \Subset W(K(\psi)/K) \cap P_k(K)$ für $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Wir verfahren per Induktion nach n, um zu zeigen, dass χ äquivalent zu einer Summe von k-fachen und $(k+1)$-fachen Pfisterformen mit Äquivalenzklassen in $W(K(\varphi)/K)$ ist. Der Fall $n = 1$ ist trivial.

Sei $n > 1$. Da $1 \in D_K(\chi)$ liegt, können wir nach Theorem 3.1.10 und Lemma 3.1.9 ohne Einschränkung annehmen, dass $a_1 = 1$ gilt. Da $1 \in D_K(\chi) \cap D_K(\varphi)$ und $1 \in D_K(\psi) \cap D_K(\tau_1)$ gilt, und da $\tau_1 \otimes K(\psi)$ hyperbolisch ist, folgt aus Satz 2.2.4

$$\chi \cong \varphi \perp \alpha \cong \psi \perp \langle x \rangle \perp \alpha \qquad \text{und} \qquad \tau_1 \cong \psi \perp \beta$$

mit geeigneten Formen α und β über K. Wir erhalten

$$\psi \perp \langle x \rangle \perp \alpha \ \cong \ \chi \ \cong \ \psi \perp \beta \perp a_2\tau_2 \perp \ldots \perp a_n\tau_n.$$

Durch Kürzen von ψ sehen wir, dass $x \in D_K(\beta \perp a_2\tau_2 \perp \ldots \perp a_n\tau_n)$ liegt. Es gibt also eine Zerlegung $x = c + d$ mit $c \in D_K(\beta) \cup \{0\}$ und $d \in D_K(a_2\tau_2 \perp \ldots \perp a_n\tau_n) \cup \{0\}$.

$d = 0$: Dann liegt $x \in D_K(\beta)$, und es folgt $\varphi \cong \psi \perp \langle x \rangle \subset \tau_1$. Also gilt $\{\tau_1\} \in W(K(\varphi)/K)$ und somit $\{a_2\tau_2 \perp \ldots \perp a_n\tau_n\} \in W(K(\varphi)/K)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a_2\tau_2 \perp \ldots \perp a_n\tau_n$ äquivalent zu einer Linearkombination k-facher und $(k+1)$-facher Pfisterformen mit Äquivalenzklassen in $W(K(\varphi)/K)$. Folglich gilt dasselbe für χ. Somit ist die Behauptung (1) in diesem Fall bewiesen.

Sei nun $\chi = \tau$ eine l-fache Pfisterform mit $l \geq k+1$. Da τ_1 eine Teilform von τ ist, existieren nach Satz 3.1.1 Elemente $b_1, \ldots, b_{l-k} \in K^*$ mit $\tau \cong \tau_1 \otimes \langle\langle b_1, \ldots, b_{l-k} \rangle\rangle$. Da $\{\tau_1\} \in W(K(\varphi)/K)$ liegt, gilt dies auch für $\{\tau_1 \otimes \langle\langle b_1 \rangle\rangle\}$. Es ist $\sigma := \tau_1 \otimes \langle\langle b_1 \rangle\rangle$ die in (2) gesuchte $(k+1)$-fache Pfisterform.

$d \neq 0$: Nach Lemma 3.1.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a_2 = d$ gilt. Aus $x \in D_K(\beta \perp \langle d \rangle)$ folgt $\varphi \cong \psi \perp \langle x \rangle \subset \tau_1 \perp \langle d \rangle \subset \tau_1 \otimes \langle 1, d \rangle$. Da $W(K(\psi)/K)$ ein strenges k-Pfister-Ideal ist, sind nach Theorem 3.1.10 die Pfisterformen τ_1 und τ_2 verbunden. Sei ρ eine $(k-1)$-Verbindung von τ_1 und τ_2, und seien $e_1, e_2 \in K^*$ mit $\tau_i \cong \rho \otimes \langle 1, e_i \rangle$ für $i = 1, 2$. Dann gilt

$$\tau_1 \perp d\tau_2 \;\cong\; \rho \otimes \langle 1, e_1, d, de_2 \rangle \;\sim\; (\rho \otimes \langle\langle e_1, d \rangle\rangle) \perp de_2(\rho \otimes \langle 1, -e_1e_2 \rangle). \tag{3.4}$$

Da φ eine Teilform von $\tau_1 \otimes \langle\langle d \rangle\rangle$ ist, gilt $\{\rho \otimes \langle\langle e_1, d \rangle\rangle\} = \{\tau_1 \otimes \langle\langle d \rangle\rangle\} \in W(K(\varphi)/K)$. Also liegt auch die Äquivalenzklasse von

$$\gamma \;:=\; \chi \perp -(\rho \otimes \langle\langle e_1, d \rangle\rangle) \;\sim\; de_2(\rho \otimes \langle\langle -e_1e_2 \rangle\rangle) \perp a_3\tau_3 \perp \ldots \perp a_n\tau_n \tag{3.5}$$

in $W(K(\varphi)/K)$ (beachte $a_1 = 1$ und $a_2 = d$). Wie bereits gezeigt gilt $W(K(\varphi)/K) \subset W(K(\psi)/K)$, weshalb aus $\tau_1, \tau_2 \Subset W(K(\psi)/K)$ und (3.4) folgt, dass $\{\rho \otimes \langle\langle -e_1e_2 \rangle\rangle\} \in W(K(\psi)/K)$ liegt. Also ist γ_{an} isometrisch zu einer Linearkombination von maximal $n-1$ Pfisterformen mit Äquivalenzklassen in $W(K(\psi)/K) \cap P_K(K)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist γ äquivalent zu einer Linearkombination k-facher und $(k+1)$-facher Pfisterformen mit Klassen in $W(K(\varphi)/K)$. Aus (3.5) folgt somit Behauptung (1), da $\rho \otimes \langle\langle e_1, d \rangle\rangle \Subset W(K(\varphi)/K)$ liegt.

Es bleibt noch Behauptung (2) für den Fall $d \neq 0$ zu zeigen. Sei also $\chi = \tau$ eine l-fache Pfisterform, $l \geq k+1$. Setze $\sigma := \tau_1 \otimes \langle 1, d \rangle$. Dann ist $\tau_1 \perp \langle d \rangle$ ein Pfisternachbar von σ und eine Teilform von χ. Es folgt $K(\sigma) \sim_K K(\tau_1 \perp \langle d \rangle)$ und $\chi \otimes K(\tau_1 \perp \langle d \rangle) \sim 0$. Wir erhalten $\chi \otimes K(\sigma) \sim 0$. Nach Satz 2.2.5 teilt σ die Form χ. Weiter oben hatten wir bereits $\varphi \subset \tau_1 \perp \langle d \rangle \subset \sigma \Subset W(K(\varphi)/K)$ gezeigt. Da σ eine $(k+1)$-fache Pfisterform ist, folgt Behauptung (2). $\square$

3.1.15 Korollar. *Sei $\varphi \cong \psi \perp \langle x \rangle$ eine anisotrope Form über K mit $x \in K^*$ und* $\dim(\psi) \geq 2$, *und sei $W(K(\psi)/K)$ ein strenges k-Pfister-Ideal, $k \in \mathbb{N}$. Gilt $W(K(\varphi)/K) \cap P_k(K) = \{0\}$ und sind je zwei $(k+1)$-fache Pfisterformen mit Klassen in $W(K(\varphi)/K)$ verbunden, so ist $W(K(\varphi)/K)$ ein strenges $(k+1)$-Pfister-Ideal.*

[Fit83, Corollary 1.3, Seite 92]

Beweis. Da $W(K(\varphi)/K)$ keine Äquivalenzklassen anisotroper k-facher Pfisterformen enthält, folgt aus Proposition 3.1.14 (1), dass $W(K(\varphi)/K)$ ein $(k+1)$-Pfister-Ideal ist. Aus Proposition 3.1.14 (2) und der Voraussetzung, dass je zwei $(k+1)$-fache Pfisterformen mit Klassen in $W(K(\varphi)/K)$ verbunden sind, folgt nach Theorem 3.1.10 die Behauptung. $\square$

3.1.16 Satz. *Sei ψ ein Pfisternachbar der k-fachen Pfisterform τ über K, $k \in \mathbb{N}$, und sei $\varphi \cong \psi \perp \langle x \rangle$ mit $x \in K^*$ anisotrop.*

(1) Ist φ ein Pfisternachbar von τ, so ist $W(K(\varphi)/K) = (\{\tau\})$ ein strenges k-Pfister-Ideal.

(2) Ist φ kein Pfisternachbar von τ, so ist $W(K(\varphi)/K)$ ein strenges $(k+1)$-Pfister-Ideal.

[Fit83, Proposition 1.4, Seite 92]

Beweis. Behauptung (1) ist ein Spezialfall von Satz 3.1.12. Gehen wir also davon aus, dass φ kein Pfisternachbar von τ ist. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass ψ und somit auch φ die 1 darstellen. Wir wollen Korollar 3.1.15 anwenden. Dazu nehmen wir an, es existiert eine nichthyperbolische Form $\sigma \Subset W(K(\varphi)/K) \cap P_k(K)$. Da sowohl σ als auch φ die 1 darstellen, gilt $\varphi \subset \sigma$. Also ist auch ψ eine Teilform und somit aus Dimensionsgründen ein Pfisternachbar von σ. Es folgt $\sigma \cong \tau$, da die zu ψ gehörige Pfisterform eindeutig bestimmt ist. Hieraus folgt der Widerspruch, dass auch φ ein Pfisternachbar von τ ist.

Also muss $W(K(\varphi)/K) \cap P_k(K) = \{0\}$ gelten. Aus $W(K(\varphi)/K) \subset W(K(\psi)/K) = (\{\tau\})$ folgt, dass je zwei $(k+1)$-fache Pfisterformen mit Äquivalenzklasse in $W(K(\varphi)/K)$ durch τ verbunden sind. Korollar 3.1.15 liefert somit die Behauptung. □

Das folgende Korollar beschäftigt sich mit dem Spezialfall einer 4-dimensionalen Form φ, die nicht ähnlich einer Pfisterform ist. Es stellt sich heraus, dass $W(K(\varphi)/K)$ ein strenges 3-Pfister-Ideal ist. Allerdings wissen wir zunächst nicht, von welchen 3-fachen Pfisterformen $W(K(\varphi)/K)$ erzeugt wird. Eine Antwort auf dieser Frage werden wir erst später in Abschnitt 4.1 geben können (siehe Lemma 4.1.14).

3.1.17 Korollar. *Sei φ eine anisotrope 4-dimensionale Form über K mit $\varphi \notin GP(K)$. Ist $W(K(\varphi)/K)$ nichtleer, so ist $W(K(\varphi)/K)$ ein strenges 3-Pfister-Ideal.*

[Fit83, Corollary 1.5, Seite 93]

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\varphi \cong \langle 1, a, b, x\rangle$ mit $a, b, x \in K^*$ und $[x]^\square \neq [ab]^\square$ gilt. Mit $\psi := \langle 1, a, b\rangle$ folgt aus dem vorherigen Satz die Behauptung. □

Abschließend betrachten wir Formen φ über K, die einen Pfisternachbar ψ der Kodimension 1 enthalten, so dass $\dim(\varphi) = \dim(\psi) + 2$ gilt und $W(K(\psi)/K)$ ein strenges k-Pfister-Ideal ist. Ist φ ein Pfisternachbar, so wissen wir, dass $W(K(\varphi)/K)$ ein strenges $(k+1)$-Pfister-Ideal ist. Der folgende Satz beschäftigt sich mit dem Fall, dass φ kein Pfisternachbar ist.

3.1.18 Satz. *Sei ψ ein Pfisternachbar der Kodimension 1 von $\tau \Subset P_k(K)$, $k \in \mathbb{N}$, und sei $\varphi \cong \psi \perp \langle x, y\rangle$ anisotrop und kein Pfisternachbar. Dann ist $W(K(\varphi)/K)$ ein strenges $(k+2)$-Pfister-Ideal.*

[Fit83, Theorem 2.1, Seite 94]

Beweis. Wäre $\psi \perp \langle x\rangle$ ähnlich einer Pfisterform, so würde $\varphi \subset (\psi \perp \langle x\rangle) \otimes \langle\langle xy\rangle\rangle$ gelten, womit φ ein Pfisternachbar wäre. Da dies ausgeschlossen wurde, folgt aus Satz 3.1.16, dass $W(K(\psi \perp \langle x\rangle)/K)$ ein strenges $(k+1)$-Pfister-Ideal ist. Proposition 3.1.14 besagt, dass der Wittkern $W(K(\varphi)/K)$ ein $\{k+1, k+2\}$-Pfister-Ideal ist. Wir nehmen an, es gibt eine $(k+1)$-fache Pfisterform $0 \not\sim \rho \Subset W(K(\varphi)/K)$. Dann muss aber φ ähnlich einer Teilform von ρ und somit ein Pfisternachbar sein. Dies ist nicht möglich, und es folgt $W(K(\varphi)/K) \cap P_{k+1}(K) = \{0\}$.

Nach Korollar 3.1.15 müssen wir nur noch zeigen, dass je zwei $(k+2)$-fache Pfisterformen $\sigma_1, \sigma_2 \Subset W(K(\varphi)/K)$ verbunden sind. Für den Fall, dass σ_1 oder σ_2 isotrop ist, gilt dies trivialerweise. Gehen wir nun davon aus, dass σ_1 und σ_2 anisotrop sind. Da σ_1 und σ_2 jeweils die 1 darstellen, gilt nach Satz 2.2.4 $a\varphi \subset \sigma_1$ und $a\varphi \subset \sigma_2$ für $a \in D_K^*(\varphi)$. Es folgt $i(\sigma_1 \perp -\sigma_2) \geq 2^k + 1$. Nach Satz 3.1.7 ist $i(\sigma_1 \perp -\sigma_2)$ eine Potenz der 2. Also muss $i(\sigma_1 \perp -\sigma_2) \geq 2^{k+1}$ gelten. Aus Satz 3.1.6 folgt, dass σ_1 und σ_2 verbunden sind. □

3.2 Exzellente Formen

Die von Knebusch in [Kne77] eingeführten exzellenten Formen bilden wohl die wichtigste Klasse quadratischer Formen innerhalb der Theorie der generischen Zerfällung, da von diesen das gesamte Zerfällungsmuster bekannt und besonders leicht zu berechnen ist. Ihre induktive Definition über Pfisternachbarn hat zur Folge, dass viele ihrer schönen Eigenschaften sich „induktiv“ aus den Eigenschaften von Pfisternachbarn herleiten lassen. Bevor wir allerdings zu exzellenten Formen kommen, wollen wir im ersten Unterabschnitt das Anisotropiekriterium von Detlev Hoffmann beweisen. Wie bereits in der Einleitung erläutert, dreht sich eine der wichtigsten Fragen in der Theorie der generischen Zerfällung darum, ob eine quadratische Form φ über dem Funktionenkörper $K(\psi)$ einer anderen Form ψ isotrop wird oder nicht. Das Anisotropiekriterium liefert die Möglichkeit, diese Frage nur anhand der Dimensionen von φ und ψ zu untersuchen, und ist aufgrund dieser einfachen Handhabe eines der stärksten Hilfsmittel in der Theorie der generischen Zerfällung. Vor allem wird es uns helfen, im zweiten Unterabschnitt Pfisternachbarn dadurch zu charakterisieren, dass ihr erster anisotroper Kern über dem Grundkörper definiert ist.

Im dritten Unterabschnitt führen wir zunächst eine Verallgemeinerung exzellenter Formen ein, die Erweiterungen quadratischer Formen. Diese haben viele der Eigenschaften von exzellenten Formen. Entsprechend fällt es leicht, viele der Beweise für exzellente Formen auf Erweiterungen von Formen zu übertragen. Wir werden sehen, dass exzellente Formen genau die Formen sind, deren höhere anisotrope Kerne sämtlich über dem Grundkörper definiert sind. Weiterhin können wir alle höheren anisotropen Kerne einer exzellenten Form und einen bestimmten Teil der höheren anisotropen Kerne der Erweiterung einer Form explizit bestimmen.

Bevor wir uns im vierten Unterabschnitt mit numerischen Invarianten exzellenter Formen beschäftigen, betrachten wir eine weitere nützliche Anwendung der Theorie der generischen Zerfällung. Wir beweisen den Satz von Pfister, der besagt, dass die Stufe eines Körpers entweder unendlich oder eine Potenz der 2 ist. Daraufhin können wir mit den bisher erarbeiteten Mitteln leicht Körper mit beliebiger Stufe konstruieren. Anschließend definieren wir Funktionen, mit denen wir induktiv sowohl die Höhe als auch die Dimensionen der höheren anisotropen Kerne einer exzellenten Form berechnen können. Besonders wichtig ist dabei die Feststellung, dass diese numerischen Invarianten einer exzellenten Form φ allein von der Dimension von φ abhängen. Daraufhin versuchen wir exzellente Formen multiplikativ zu zerlegen. Wir werden sehen, dass sich alle exzellenten Formen durch Multiplikation einer ungeradedimensionalen exzellenten Form mit einer Pfisterform ergeben. Ferner lassen sich exzellente Formen im Allgemeinen auf viele Arten als Summe zweier exzellenter Formen schreiben.

Der letzte Unterabschnitt beschäftigt sich ausschließlich mit niedrigdimensionalen exzellenten Formen. Wir werden exzellente Formen der Dimension ≤ 12 über bestimmte, von ihrer Dimension abhängige Kriterien vollständig beschreiben.

3.2.1 Das Anisotropiekriterium

3.2.1 Definition. *Eine Körpererweiterung M von K heißt* unirational*, falls eine rein transzendente Erweiterung L von K mit $K \subset M \subset L$ existiert.*

Seien φ und ψ anisotrope Formen über K. In [Hof95b] stellt Detlev Hoffmann eine Reihe wichtiger Resultate vor, die sich mit der Frage nach der Anisotropie von $\psi \otimes K(\varphi)$ und der Möglichkeit, einen Erweiterungskörper L von K zu finden, so dass ψ_L Teilform einer Pfisterform ist, beschäftigen. Das wichtigste dieser Resultate ist das Anisotropiekriterium. Dieses besagt, dass $\psi \otimes K(\varphi)$ anisotrop ist, wenn die Dimensionen von φ und ψ auf bestimmte Weise echt durch eine 2er-Potenz getrennt sind. Insbesondere ermöglicht es, die Beweise der Charakterisierungen von Pfisternachbarn und exzellenten Formen in den Unterabschnitten 3.2.2 und 3.2.3 einfacher zu formulieren, als Knebusch dies in [Kne77] vor Einführung dieses Kriteriums konnte. Grundlage für den Beweis des Anisotropiekriteriums 3.2.3 bildet das folgende Lemma[1]. Wir werden nur die Punkte (2) und (3) dieses Lemmas benötigen. Allerdings wird in [Hof95b] deutlich, dass das Hauptlemma generell ein nützliches Hilfsmittel in der Theorie der generischen Zerfällung darstellt, weshalb wir hier eine ausführlichere Formulierung wählen.

3.2.2 Lemma. (Hauptlemma)
Sei φ eine anisotrope Form über K mit $n = \dim(\varphi) \leq 2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert eine Körpererweiterung M von K mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es gibt ein $s \in \mathbb{N}_0$ und einen Turm

$$K \subset L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_s = M$$

aus Körpererweiterungen, bei denen es sich sämtlich um Funktionenkörper von Formen der Dimension $> 2^k$ handelt.

(2) Es existiert eine anisotrope $(k+1)$-fache Pfisterform τ über M, so dass φ_M eine Teilform von τ ist.

(3) Alle anisotropen Formen über K bleiben anisotrop über $M(\tau)$.

(4) Der Körper $M(\tau)$ ist eine unirationale Erweiterung von K.

[Hof95b, Main Lemma, Seite 462; Remark 1, Remark 2, Seite 466]

Beweis. Sei ζ eine isotrope Form über K mit $\dim(\zeta) \geq 2^k + 1$, und sei $L_0 := K(\zeta)$. Dann ist L_0 nach Satz 2.1.19 rein transzendent mit $\mathrm{transgrad}_K(L_0) = l = \dim(\zeta) - 1 \geq k + 1$. Folglich existieren l über K algebraisch unabhängige Element $X_1, \ldots, X_l \in L_0$. Setze $\tau := \langle\langle X_1, \ldots, X_{k+1} \rangle\rangle$ über L_0.

Nach Beispiel 2.1.21 gilt $E := L_0(\sqrt{-X_1}) \cong L_0(\langle 1, X_1 \rangle)_s$. Dann ist durch die Menge $\{\sqrt{-X_1}, X_2, \ldots, X_l\}$ sicherlich eine Transzendenzbasis von E über K gegeben und E eine rein transzendente Erweiterung von K. Die anisotrope Pfisterform τ wird von $\langle 1, X_1 \rangle$ geteilt. Deshalb ist $\tau \otimes E$ hyperbolisch, und bei $E(\tau)$ handelt es sich um eine rein transzendente Erweiterung von E. Es folgt, dass der Funktionenkörper $L_0(\tau)$ in der rein transzendenten Erweiterung $E(\tau)$ von K enthalten ist. Also bleiben alle über K anisotropen Formen über $L_0(\tau)$ anisotrop.

[1] Der Beweis des Hauptlemmas in [Hof95b] zeigt nur die Behauptungen (2) und (3). Auf den Seiten 466 und 467 beweist Hoffmann nachträglich zunächst Behauptung (1) (Remark 1), nach einer Idee von A. Wadsworth, und dann Behauptung (4) (Remark 2). Diese Bemerkungen 1 und 2 liefern Alternativen für Teile des ursprünglichen Beweises und lassen sich leicht in diesen einfügen.

Wir betrachten Körpererweiterungen F von L_0, die die Eigenschaft

$$(\circledast)\qquad \begin{cases} 1. & \tau_F \text{ ist anisotrop.} \\ 2. & \text{Alle anisotropen Formen über } K \text{ bleiben anisotrop über } F(\tau_F) \end{cases}$$

haben. Beachte, dass L_0 wie bereits gezeigt die Eigenschaft $(\circledast)$ hat. Setze

$$\rho := \tau\perp-\varphi_{L_0}, \quad \rho_0 := \rho_{an}, \quad L_r := L_{r-1}(\rho_{r-1}) \quad \text{und} \quad \rho_r := (\rho_{r-1}\otimes L_r)_{an}.$$

für $r = 1,\dots,h$, wobei $h = h(\rho)$ sei. Dann ist $(L_r \mid 0 \le 1 \le h)$ ein generischer Zerfällungsturm von ρ. Sei $0 \le s \le h$ maximal, so dass $M := L_s$ die Eigenschaft $(\circledast)$ hat. Nach Definition von $(\circledast)$ ist τ_M anisotrop. Weiterhin ist $\varphi\otimes M(\tau_M)$ und somit auch φ_M anisotrop. Deshalb gilt $m := i(\rho_M) \le \dim(\varphi) \le 2^k$. Für $s > 0$ und $0 \le r < s$ erhalten wir

$$\dim(\rho_r) \;=\; \dim(\tau)+\dim(\varphi)-2i(\rho_{L_r}) \;>\; 2^{k+1}-\dim(\varphi) \;\ge\; 2^{k+1}-2^k \;=\; 2^k.$$

Wir wollen zeigen, dass $m = \dim(\varphi)$ gilt. Aus der Anisotropie von τ_M und φ_M, folgt dann $\varphi_M \subset \tau_M$ und somit die Behauptungen (1), (2) und (3).

Wir nehmen an, es gilt $m < \dim(\varphi)$. Für $r = 0,\dots,s$ ist

$$\tau_{L_r}\perp-\varphi_{L_r} \;\cong\; \rho_r\perp(i(\rho_{L_r})\times\mathbb{H}).$$

Da τ_M und φ_M anisotrop sind, muss dies auch für die Formen τ_{L_r} und φ_{L_r} gelten. Also existieren Formen τ_r', φ_r' und χ_r über L_r, so dass

$$\tau_{L_r} \cong \chi_r\perp\tau_r', \quad \varphi_{L_r} \cong \chi_r\perp\varphi_r' \quad \text{und} \quad \rho_r \cong \tau_r'\perp-\varphi_r' \tag{3.6}$$

gilt. Speziell für $r = s$ folgt

$$\dim(\tau_s') = \dim(\tau)-\dim(\chi_s) = 2^{k+1}-m > 2^{k+1}-\dim(\varphi) \ge 2^{k+1}-2^k = 2^k.$$

Also ist τ_s' ein Pfisternachbar von τ_M. Beachte, dass $\dim(\rho_s) > \dim(\tau_s') > 2^k$ und also $\dim(\rho_s) \ge 3$ gilt. Wir wollen zeigen, dass auch $M(\rho_s) = L_{s+1}$ die Eigenschaft $(\circledast)$ hat. Dies wäre ein Widerspruch zur Maximalität von s, aus dem $m = \dim(\varphi)$ folgt.

Zunächst beweisen wir, dass $\tau\otimes M(\rho_s)$ anisotrop ist. Nehmen wir an, $\tau\otimes M(\rho_s)$ sei isotrop und somit hyperbolisch. Aus Satz 2.2.4 folgt die Existenz eines $a \in M^*$ und einer Form β über M, so dass

$$\tau_M \;\cong\; a\rho_s\perp\beta \;\cong\; a\tau_s'\perp-a\varphi_s'\perp\beta$$

gilt. Sei $b \in D_M^*(\tau_s')$. Es folgt $b, ab \in D_M^*(\tau_M) = G_M(\tau_M)$ (vergleiche Korollar 1.2.16). Da τ_M eine Pfisterform ist, ist die Menge $D_M^*(\tau_M)$ eine multiplikative Gruppe, weshalb $a \in G_M(\tau_M)$ liegt. Somit erhalten wir

$$\tau_M \;\cong\; a\tau_M \;\cong\; \tau_s'\perp-\varphi_s'\perp a\beta \;\cong\; \rho_s\perp a\beta.$$

Hieraus folgt

$$\rho_s\perp(m\times\mathbb{H}) \;\cong\; \tau_M\perp-\varphi_M \;\cong\; \rho_s\perp a\beta\perp-\varphi_M$$

und somit, dass $a\beta\perp-\varphi_M$ hyperbolisch ist. Es gilt

$$2m \;=\; \dim(\beta)+\dim(\varphi) \;>\; \dim(\beta)+m$$

und also $\dim(\beta) < m < \dim(\varphi)$. Da $a\beta\perp -\varphi_M$ hyperbolisch ist, widerspricht dies der Anisotropie von φ_M. Also ist $\tau \otimes M(\rho_s)$ anisotrop.

Als nächstes zeigen wir, dass jede anisotrope Form ψ über K über $M(\rho_s)(\tau \otimes M(\rho_s)) \cong M(\tau_M)(\rho_s \otimes M(\tau_M))$ anisotrop bleibt. Beachte, dass τ'_s ein Pfisternachbar von τ_M und außerdem eine Teilform von ρ_s ist. Da die Funktionenkörper von τ'_s und τ_M äquivalent sind, ist τ'_s und entsprechend auch ρ_s über $M(\tau_M)$ isotrop. Also ist $M(\tau_M)(\rho_s \otimes M(\tau_M))$ eine rein transzendente Erweiterung von $M(\tau_M)$. Da M die Eigenschaft ($\circledast$) hat, ist $\psi \otimes M(\tau_M)$ anisotrop. Somit folgt dies auch für $\psi \otimes M(\rho_s)(\tau \otimes M(\rho_s))$.

Also hat auch $L_{s+1} = M(\rho_s)$ die Eigenschaft ($\circledast$), und wir erhalten den gewünschten Widerspruch zur Maximalität von s.

Es bleibt noch Behauptung (4) zu zeigen. Am Anfang dieses Beweises hatten wir gesehen, dass $E = L_0(\langle 1, X_1\rangle)_s$ eine rein transzendente Erweiterung von K ist. Nun gilt

$$M(\tau) \;=\; L_0(\rho_0)(\rho_1)\dots(\rho_{s-1})(\tau) \;\subset\; E(\rho_0)(\rho_1)\dots(\rho_{s-1})(\tau) \;:=\; N.$$

Ist $s \geq 1$, so gilt $i(\rho_{L_r}) < \dim(\varphi) \leq 2^k$ für alle $0 \leq r < s$. Es folgt $\dim(\tau'_r) = 2^{k+1} - i(\rho_{L_r}) > 2^k$ (vergleiche (3.6)). Also ist die Teilform τ'_r von ρ_r zusätzlich ein Pfisternachbar von τ_{L_r}. Folglich sind τ'_r und ρ_r isotrop über $E(\rho_0)(\rho_1)\dots(\rho_{r-1})$. Nach Satz 2.1.19 ist $E(\rho_0)(\rho_1)\dots(\rho_{r-1})(\rho_r)$ für $r = 0, \dots, s-1$ eine rein transzendente Erweiterung von K. Weiterhin ist N rein transzendent über $E(\rho_0)\dots(\rho_s)$, da $\tau_E \sim 0$ gilt. Ist $s = 0$, so ist $N = E(\tau)$ offensichtlich eine rein transzendente Erweiterung von K. Per Definition ist der Körper $M(\tau)$ unirational über K. □

Wie bereits erwähnt beruht unser Beweis des Anisotropiekriteriums auf dem Hauptlemma. Im Gegensatz dazu haben Jürgen Hurrelbrink und Ulf Rehmann in [HR95] einen alternativen, kürzeren Beweis angegeben, der Methoden aus der algebraischen Geometrie verwendet. Tatsächlich beweisen Hurrelbrink und Rehmann zuerst einige der Resultate, deren Beweise in [Hof95b] auf dem Hauptlemma basieren, und erhalten so eine allgemeinere Version des Hauptlemmas als Folgerung. Da die nötigen Grundlagen hier nicht vorausgesetzt werden können, verzichten wir auf eine Wiedergabe dieses alternativen Beweises.

3.2.3 Theorem. (Anisotropiekriterium)
Seien φ und ψ anisotrope Formen über K, zu denen es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\dim(\psi) \leq 2^k < \dim(\varphi)$ gibt. Dann bleibt $\psi \otimes K(\varphi)$ anisotrop.

[Hof95b, Theorem 1, Seite 461]

Beweis. Nach dem Hauptlemma 3.2.2 existiert eine Körpererweiterung M von K und eine $(k+1)$-fache Pfisterform τ über M, so dass $\varphi_{M(\tau)}$ anisotrop ist und ψ_M eine Teilform von τ ist. Wir nehmen an $\psi \otimes K(\varphi)$ sei isotrop. Wegen $K(\varphi) \subset M(\varphi)$ ist auch $\psi_M \otimes M(\varphi)$ isotrop. Es folgt, dass $\tau \otimes M(\varphi)$ isotrop und somit hyperbolisch ist. Also ist nach Satz 2.2.4 φ_M ähnlich einer Teilform von τ. Da $\dim(\varphi) > 2^k = \frac{1}{2}\dim(\tau)$ gilt, ist φ_M ein Pfisternachbar von τ. Hieraus folgt der Widerspruch, dass $\varphi \otimes M(\tau)$ isotrop ist. □

Als direkte Anwendung des Anisotropiekriteriums beweisen wir eine Charakterisierung von Pfisternachbarn mit Hilfe von Funktionenkörpern. Wir wissen bereits, dass die Funktionenkörper eines Pfisternachbarn und der zugehörigen Pfisterform äquivalent sind. Mit Hilfe des Anisotropiekriteriums lässt sich leicht die umgekehrte Richtung zeigen. So unscheinbar der Beweis hierzu auch ist, so sei doch betont, dass ein so klares Verständnis des Sachverhalts nur durch das Anisotropiekriterium möglich wird.

3.2.4 Satz. *Sei τ eine anisotrope k-fache Pfisterform über K mit $k \geq 1$ und φ eine beliebige anisotrope Form über K. Die Funktionenkörper von φ und τ sind genau dann K-äquivalent, wenn φ ein Pfisternachbar von τ ist.*

[Hof95b, Proposition 2, Seite 471]

Beweis. Ist φ ein Pfisternachbar von τ, so folgt aus Satz 2.2.10 die K-Äquivalenz von $K(\varphi)$ und $K(\tau)$. Es gelte umgekehrt $K(\varphi) \sim_K K(\tau)$. Dann ist $\tau \otimes K(\varphi)$ hyperbolisch, φ also ähnlich einer Teilform von τ. Da $\varphi \otimes K(\tau)$ ebenfalls isotrop ist, impliziert das Anisotropiekriterium 3.2.3, dass $\dim(\varphi) > 2^{k-1} = \frac{1}{2}\dim(\tau)$ gilt. □

3.2.2 Charakterisierung von Pfisternachbarn

Sei φ eine Form über K, die nicht zerfällt, und $(K_r \mid 0 \leq r \leq h)$ ein generischer Zerfällungsturm von φ.

3.2.5 Definition. *Sei $j \in \{0, \ldots, h\}$. Wir sagen, die Form $\ker_j(\varphi)$ ist* über K definiert*, wenn eine Form η über K mit $\eta \otimes K_j \cong \ker_j(\varphi)$ existiert. Dann heißt $\ker_j(\varphi)$ auch* durch η definiert.

Trivialerweise ist $\ker_0(\varphi) = \varphi_{an}$ über K definiert. Ist $\dim(\varphi)$ gerade, so ist sicherlich auch die 0-dimensionale Form $\ker_h(\varphi)$ über K definiert. Sei $\dim(\varphi)$ ungerade. Da für die Diskriminante $d(\varphi \otimes K_h) = d(\varphi) K_h^{*2}$ gilt, folgt $\ker_h(\varphi) = \langle d(\varphi) \rangle \otimes K_h$. Also ist $\ker_h(\varphi)$ für jede Form φ über K definiert.

Sei $\ker_j(\varphi)$ über K durch η definiert, und sei $(K'_r \mid 0 \leq r \leq h)$ ein weiterer generischer Zerfällungsturm von φ. Dann gilt $K_r \sim K'_r$ für alle $r \in \{0, \ldots, h\}$. Aus Proposition 2.1.28 (2) folgt $(\varphi \otimes K'_j)_{an} \cong \eta \otimes K'_j$. Dies bedeutet, dass Definition 3.2.5 unabhängig von der Wahl des generischen Zerfällungsturms von φ ist. Aus dem folgenden Satz folgt insbesondere, dass η bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

3.2.6 Satz. *Wir gehen von einer Form φ über K, die nicht zerfällt, und einem generischen Zerfällungsturm $(K_r \mid 0 \leq r \leq h)$ von φ aus. Sei $j \in \{1, \ldots, h\}$, und seien η_1 und η_2 anisotrope Formen über K mit $\dim(\eta_i) < \dim(\varphi_{j-1})$ und $\eta_i \otimes K_j \sim \varphi \otimes K_j$ für $i = 1, 2$. Dann folgt bereits $\eta_1 \cong \eta_2$.*

[Kne77, Proposition 7.2, Seite 1]

Beweis. Indem wir unter Umständen φ durch φ_{an} ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass φ anisotrop ist. Die Form η habe unter allen Formen ζ mit $\zeta \otimes K_j \sim \varphi \otimes K_j$ minimale Dimension. Zeigen wir die Behauptung für η und η_1, so gilt sie sicherlich auch für η_1 und η_2. Ohne Einschränkung können wir also $\eta_1 = \eta$ annehmen.

Wir verfahren per Induktion nach j. Sei zunächst $j = 1$. Nehmen wir an, η_1 und η_2 seien nicht isometrisch. Dann besitzt $\eta_1 \perp -\eta_2$ den nichttrivialen anisotropen Kern ψ. Für diesen gilt

$$\psi \otimes K(\varphi) \;\sim\; (\varphi \perp -\varphi) \otimes K(\varphi) \;\sim\; 0.$$

Nach Satz 2.2.4 existiert eine Form χ über K und ein $a \in K^*$, so dass $a\psi \cong \varphi \perp \chi$ gilt. Es folgt $\varphi \otimes K(\varphi) \sim -\chi \otimes K(\varphi)$. Wir erhalten

$$\dim(\eta_1) + \dim(\eta_2) \;\geq\; \dim(\varphi) + \dim(\chi)$$

und somit

$$\dim(\eta_1) - \dim(\chi) \;\geq\; \dim(\varphi) - \dim(\eta_2) \;>\; 0. \tag{3.7}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität der Dimension von η_1. Also muss $\eta_1 \cong \eta_2$ gelten.

Sei nun $j \geq 2$. Wir nehmen an, η_1 und η_2 seien nicht isomorph und entsprechend auch nicht äquivalent. Sei $s \in \{0, \ldots, j-1\}$ maximal, so dass $\eta_1 \otimes K_s$ und $\eta_2 \otimes K_s$ nicht äquivalent sind. Ist $s > 0$, so wenden wir die Induktionsvoraussetzung für $j - s$ auf die anisotropen Kerne von $\eta_1 \otimes K_s$ und $\eta_2 \otimes K_s$ an und erhalten den Widerspruch $(\eta_1 \otimes K_s)_{an} \cong (\eta_2 \otimes K_s)_{an}$. Also muss $s = 0$ gelten. Wegen der Maximalität von s gilt $\eta_1 \otimes K(\varphi) \sim \eta_2 \otimes K(\varphi)$. Für den nichttrivialen Kern $\zeta := (\eta_1 \perp -\eta_2)_{an}$ gilt $\zeta \otimes K(\varphi) \sim 0$. Wie im Induktionsanfang existiert eine Form χ mit $\varphi \otimes K(\varphi) \sim -\chi \otimes K(\varphi)$. Hieraus folgt insbesondere $\varphi \otimes K_j \sim -\chi \otimes K_j$. Aus Ungleichung (3.7) folgt dann wieder ein Widerspruch zur Minimalität von η_1. □

3.2.7 Lemma. *Seien φ und η anisotrope Formen über K, für die $\dim(\varphi) > \dim(\eta)$ und $\varphi \otimes K(\varphi) \sim \eta \otimes K(\varphi)$ gilt. Dann ist $\varphi \perp -\eta$ ähnlich einer anisotropen Pfisterform über K.*

[Kne77, Theorem 7.13, Seite 5][2]

Beweis. Wir verfahren per Induktion nach $m := \dim(\eta)$. Für $m \leq 1$ folgt die Behauptung sofort aus Theorem 2.2.22.

Sei nun $m \geq 2$. Wir nehmen an, $\varphi \perp -\eta$ sei isotrop. Dann existiert ein $a \in D_K^*(\varphi) \cap D_K^*(\eta)$ und Formen φ' und η' mit

$$\varphi \;\cong\; \varphi' \perp \langle a \rangle \qquad \text{und} \qquad \eta \;\cong\; \eta' \perp \langle a \rangle.$$

Aus $\varphi \otimes K(\varphi) \sim \eta \otimes K(\varphi)$ folgt

$$\varphi' \otimes K(\varphi) \;\sim\; \eta' \otimes K(\varphi).$$

Ferner gilt $\dim(\varphi') > m - 1 = \dim(\eta')$, da $\dim(\varphi) > m$ vorausgesetzt wurde. Folglich ist $\varphi' \otimes K(\varphi)$ isotrop und es existiert eine K-Stelle $K(\varphi') \to K(\varphi)^\infty$. Da φ' eine Teilform von φ ist, muss auch $\varphi \otimes K(\varphi')$ isotrop sein. Somit existiert auch eine K-Stelle $K(\varphi) \to K(\varphi')^\infty$ und die Körper $K(\varphi)$ und $K(\varphi')$ sind K-äquivalent. Hieraus folgt

$$\varphi' \otimes K(\varphi') \;\sim\; \eta' \otimes K(\varphi').$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\varphi' \perp -\eta'$ ähnlich einer anisotropen Pfisterform τ über K. Wegen $\dim(\varphi') > \dim(\eta')$ ist φ' ein Pfisternachbar von τ. Nach Satz 2.2.10 gilt

$$K(\tau) \;\sim\; K(\varphi') \;\sim\; K(\varphi)$$

und insbesondere $\tau \otimes K(\varphi) \sim 0$. Aus Satz 2.2.4 folgt die Existenz eines $b \in K^*$ und einer anisotropen Form ζ mit $\dim(\zeta) < \dim(\varphi)$ und $b\tau \cong \varphi \perp -\zeta$. Da nun $\zeta \otimes K(\varphi) \sim \varphi \otimes K(\varphi) \sim$

[2]Der Beweis für die Anisotropie von $\varphi \perp -\eta$ verläuft hier wie bei Knebusch in [Kne77]. Um dann zu zeigen, dass $\varphi \perp -\eta$ ähnlich einer Pfisterform ist, wählen wir einen kürzeren Beweis, der das Anisotropiekriterium verwendet.

$\eta \otimes K(\varphi)$ gilt, folgt aus Satz 3.2.6 der Widerspruch $\zeta \cong \eta$ zu $\dim(\eta) = \dim(\zeta) + 2$. Also muss $\varphi\perp - \eta$ anisotrop sein.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\varphi\perp - \eta$ ähnlich einer Pfisterform ist. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{k-1} < \dim(\eta) \leq 2^k$ und $L := K(\varphi\perp - \eta)$. Dann ist $\dim(\varphi\perp - \eta) > 2\dim(\eta) > 2^k$ und nach dem Anisotropiekriterium 3.2.3 ist η_L anisotrop. Wir nehmen an, φ_L sei anisotrop. Da zusätzlich $\varphi_L \otimes L(\varphi_L) \sim \eta_L \otimes L(\varphi_L)$ gilt, folgt aus dem bereits gezeigten, dass $(\varphi\perp - \eta)_L$ anisotrop ist, was der Definition eines generischen Nullstellenkörpers widerspricht. Also ist φ_L isotrop, weshalb eine Stelle $K(\varphi) \to L^\infty$ existiert und $(\varphi\perp - \eta)_L \sim 0$ gilt. Nach Theorem 2.2.22 ist $\varphi\perp - \eta$ ähnlich einer Pfisterform. □

Dieses Lemma und das Anisotropiekriterium reichen bereits aus, um zu zeigen, dass anisotrope Pfisternachbarn der Dimension ≥ 2 genau die Formen sind, für die der erste anisotrope Kern über dem Grundkörper definiert ist. Knebusch hatte dies wohl bereits vermutet (siehe [Kne77, Proposition 8.1, Seite 12]), konnte es jedoch nur für Pfisternachbarn beweisen, deren Kodimension kleiner oder gleich 5 war. Hoffmann hat diese Charakterisierung von Pfisternachbarn dann in [Hof95b, Proposition 3, Seite 470] erstmals bewiesen. Dafür benötigte er allerdings noch ein Resultat aus dem Artikel [Fit81] von Robert W. Fitzgerald.

3.2.8 Theorem. *Für eine anisotrope Form φ über K mit $\dim(\varphi) \geq 2$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) Die Form φ ist ein Pfisternachbar mit m-dimensionalem Komplement η.

(ii) Es existiert eine anisotrope m-dimensionale Form η über K so, dass $\dim(\varphi) > m$ und $\varphi \otimes K(\varphi) \sim \eta \otimes K(\varphi)$ gilt.

(iii) Der anisotrope Kern von $\varphi \otimes K(\varphi)$ ist über K durch eine m-dimensionale Form η definiert.

Beweis. Die Folgerung „(iii) $\Rightarrow$ (ii)" ist trivial und die Aussage „(ii) $\Rightarrow$ (i)" folgt direkt aus Lemma 3.2.7.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei φ ein Pfisternachbar der Kodimension m. Dann existiert ein $a \in K^*$ und eine Pfisterform τ über K so, dass $\varphi\perp - \eta \cong a\tau$ gilt. Die Funktionenkörper von φ und τ sind äquivalent, und es folgt $(\varphi\perp - \eta) \otimes K(\varphi) \sim 0$ und somit $\varphi \otimes K(\varphi) \sim \eta \otimes K(\varphi)$. Da $\dim(\eta) < 2^k < \dim(\varphi)$ gilt, folgt aus dem Anisotropiekriterium 3.2.3, dass $\eta \otimes K(\varphi)$ anisotrop ist. Wir erhalten Aussage (iii): $(\varphi \otimes K(\varphi))_{an} \cong \eta \otimes K(\varphi)$. □

3.2.3 Exzellente Formen

Wir wissen nun, dass Pfisternachbarn über K genau die Formen sind, für die der erste anisotrope Kern über K definiert ist. Es existiert nun eine besondere Klasse von Pfisternachbarn, die sich dadurch charakterisieren lassen, dass all ihre höheren anisotropen Kerne über K definiert sind. Dies sind genau die anisotropen, von Knebusch in [Kne77, Section 7] eingeführten exzellenten Formen.

Zunächst betrachten wir aber eine Verallgemeinerung von exzellenten Formen die von Jürgen Hurrelbrink und Ulf Rehmann in [HR93] eingeführt wurden. Es handelt sich dabei um sogenannte Erweiterungen quadratischer Formen. Wir führen diese bereits hier ein, da sich viele der Resultate aus [Kne77, Section 7] direkt auf Erweiterungen von Formen verallgemeinern lassen.

3.2.9 Definition. *Sei ψ eine Form über K. Eine Form φ über K heißt ψ-*Erweiterung*, falls eine Sequenz $\varphi = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_t = \psi$ existiert, so dass für $r = 1, \ldots, t \in \mathbb{N}_0$ die Form η_{r-1} ein Pfisternachbar mit Komplement η_r ist. Die Zahl t heißt* Ordnung *der ψ-Erweiterung φ und wird mit* $\operatorname{ord}(\varphi/\psi)$ *bezeichnet. Wir nennen η_r das r-*te Komplement *von φ.*

Die folgende Proposition findet sich ursprünglich als Proposition 7.9 in [Kne77, Seite 3] für den Spezialfall exzellenter Formen. Der Beweis lässt sich allerdings fast komplett auf Erweiterungen quadratischer Formen übertragen.

3.2.10 Proposition. *Sei ψ eine anisotrope Form über K und φ eine anisotrope ψ-Erweiterung der Ordnung $t = \operatorname{ord}(\varphi/\psi)$. Dann wird für $r \in \{0, \ldots, t\}$ der r-te anisotrope Kern von φ über K durch $(-1)^r\eta_r$ definiert, wobei η_r das r-te Komplement von φ ist.*

Beweis. Sei φ eine ψ-Erweiterung. Dann existiert eine Sequenz $\varphi = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_t = \psi$ wie in Definition 3.2.9. Sei weiter $(K_s \mid 0 \leq s \leq h)$ ein generischer Zerfällungsturm von φ. Es bietet sich an, per Induktion nach t zu verfahren. Der Fall $t = 0$ ist trivial. Ist $t = 1$, so ist φ ein Pfisternachbar mit Komplement ψ. Aus Theorem 3.2.8 folgt $\ker_1(\varphi) \cong -\psi \otimes K_1$.

Nun sei $t \geq 2$. Aus Theorem 3.2.8 folgt, dass $\ker_1(\varphi) \cong -\eta_1$ gilt. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{k-1} < \dim(\varphi) < 2^k$. Da $\dim(\eta_r) \leq 2^{k-1}$ für $r \in \{1, \ldots, t\}$ gilt, folgt aus dem Anisotropiekriterium, dass $\eta_r \otimes K_1$ für $r = 1, \ldots, t$ anisotrop ist. Wir erhalten eine Sequenz

$$\eta_1 \otimes K_1,\ \eta_2 \otimes K_1,\ \ldots,\ \eta_t \otimes K_1,$$

so dass $\eta_{r-1} \otimes K_1$ für $r = 2, \ldots, t$ ein Pfisternachbar mit Komplement $\eta_r \otimes K_1$ ist. Also ist die Form $\eta_1 \otimes K_1$ eine ψ_{K_1}-Erweiterung der Ordnung $t-1$. Sicherlich ist $(K_s \mid 1 \leq s \leq h)$ ein generischer Zerfällungsturm von $\eta_1 \otimes K_1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass für $r = 1, \ldots, t$ der $(r-1)$-te anisotrope Kern von $\eta_1 \otimes K_1$ über K_1 durch $(-1)^{r-1}\eta_r \otimes K_1$ definiert ist. Für $r = 2, \ldots, t$ folgt

$$\ker_r(\varphi) \;\cong\; \ker_{r-1}(-\eta_1 \otimes K_1) \;\cong\; (-1)^{r-1}(-\eta_r) \otimes K_r \;\cong\; (-1)^r\eta_r \otimes K_r.$$

Also ist für $r = 0, \ldots, t$ der r-te anisotrope Kern von φ über K durch $(-1)^r\eta_r$ definiert. □

3.2.11 Definition. *Sei φ eine Form über K. Ist $\dim(\varphi) \leq 1$, so ist φ* exzellent*. Ist $\dim(\varphi) \geq 2$, so heißt φ* exzellent*, falls φ ein Pfisternachbar ist, dessen Komplement exzellent ist.*

Eine Form φ ist also genau dann exzellent, wenn eine Sequenz

$$\varphi = \eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_t \tag{3.8}$$

existiert, so dass $\dim(\eta_t) \leq 1$ gilt und η_{r-1} für $r = 1, \ldots, t$ ein Pfisternachbar mit Komplement η_r ist. Mit anderen Worten ist eine exzellente Form eine η_t-Erweiterung mit $\dim(\eta_t) \leq 1$. Wir schreiben abkürzend $\operatorname{ord}(\varphi) := \operatorname{ord}(\varphi/\eta_t)$.

3.2.12 Korollar. *Für eine anisotrop exzellente Form φ über K gilt $h(\varphi) = \operatorname{ord}(\varphi)$.*

3.2.13 Beispiel. Sei K ein formal reeller Körper. Dann ist die Form $s \times \langle 1 \rangle$ für beliebiges $s \in \mathbb{N}$ anisotrop. Sei $s \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $2^k < s \leq 2^{k+1}$ und $1 \leq m \leq 2^k$ mit $s = 2^k + m$. Dann ist sicherlich $s \times \langle 1 \rangle$ ein Pfisternachbar der Form $2^{k+1} \times \langle 1 \rangle$ mit Komplement $(2^k - m) \times \langle 1 \rangle$. Offensichtlich ist auch $(2^k - m) \times \langle 1 \rangle$ wieder ein Pfisternachbar, und so folgt sofort per Induktion, dass $s \times \langle 1 \rangle$ für beliebiges $s \in \mathbb{N}_0$ exzellent ist. $\triangle$

Knebusch musste in [Kne77] das folgende Theorem 3.2.15 noch ohne die Charakterisierung von Pfisternachbarn aus Theorem 3.2.8 beweisen. Letzteres Resultat stellt jedoch ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis von Theorem 3.2.15 dar. Dieser verkürzt sich dadurch auf weniger als die Hälfte der Länge des ursprünglichen Beweises von Knebusch (siehe [Kne77, Theorem 7.14, Seite 5]) und wird zudem wesentlich anschaulicher.

3.2.14 Lemma. *Seien φ und ψ Formen über K mit $\dim(\varphi) > 2^{\deg(\psi)}$. Dann gilt $\deg(\psi) = \deg(\psi \otimes K(\varphi))$. Ist ψ anisotrop, $\dim(\psi) = 2^{k+1}$ und $\dim(\varphi) > 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so ist insbesondere ψ genau dann ähnlich einer Pfisterform, wenn dies für $\psi \otimes K(\varphi)$ gilt.*

Beweis. Ist φ isotrop, so sind beide Behauptungen trivial. Sei φ fortan also anisotrop. Ist $\dim(\psi)$ ungerade oder ψ hyperbolisch, so die erste Behauptung trivial. Entsprechend sei $\dim(\psi)$ gerade, $\dim(\psi_{an}) > 1$, L ein Leitkörper von ψ und τ die Leitform von ψ über L. Nach Satz 2.2.34 (2) gilt genau dann $\deg(\psi \otimes K(\varphi)) > \deg(\psi)$, wenn φ_L eine Teilform von τ ist. Da aber nach Voraussetzung $\dim(\varphi) > 2^k = \dim(\tau)$ gilt, ist dies unmöglich. Also muss $\deg(\psi \otimes K(\varphi)) = \deg(\psi)$ gelten.

Gilt $\psi \Subset GP_{k+1}(K)$, so gilt sicherlich auch $\psi_{K(\varphi)} \Subset GP_{k+1}(K(\varphi))$. Ist nun $\dim(\psi) = 2^{k+1}$ und ψ nicht ähnlich einer Pfisterform, so muss $\deg(\psi) \leq 2^k$ sein. Aus dem bereits Bewiesenen erhalten wir $\deg(\psi) = \deg(\psi \otimes K(\varphi)) < 2^{k+1}$, weshalb auch $\psi \otimes K(\varphi)$ nicht ähnlich einer Pfisterform sein kann. $\square$

3.2.15 Theorem. *Sei φ eine anisotrope Form über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Die Form φ ist exzellent.

(ii) Alle höheren Kerne von φ sind über K definiert.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt sofort aus Proposition 3.2.10. Sei also φ eine anisotrope Form, für die alle höheren Kerne über K definiert sind. Wir verfahren per Induktion nach der Höhe $h := h(\varphi)$. Für $h = 0$ ist $\dim(\varphi) \leq 1$ und somit φ exzellent. Ist $h = 1$, so ist φ ähnlich einer Pfisterform oder dem reinen Anteil einer Pfisterform. Insbesondere ist φ ein Pfisternachbar dessen Komplement Dimension 0 oder 1 hat. Also ist φ exzellent.

Sei $h \geq 2$ und $(K_s \mid 0 \leq s \leq h)$ ein generischer Zerfällungsturm von φ. Da der erste anisotrope Kern von φ über K durch eine Form η_1 definiert ist, folgt aus Theorem 3.2.8, dass φ ein Pfisternachbar mit Komplement $-\eta_1$ ist. Es hat $\eta_1 \otimes K_1$ die Höhe $h-1$, und $(K_s \mid 1 \leq s \leq h)$ ist ein generischer Zerfällungsturm von $\eta_1 \otimes K_1$. Sei $r \in \{2, \ldots, h\}$ beliebig. Dann existiert eine Form η_r über K, so dass $\ker_r(\varphi) \cong \eta_r \otimes K_r$ gilt. Es folgt $\ker_{r-1}(\eta_1 \otimes K_1) \cong \eta_r \otimes K_r$. Also sind auch für $\eta_1 \otimes K_1$ alle höheren anisotropen Kerne über K_1 definiert. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\eta_1 \otimes K_1$ exzellent, und die Sequenz

$$\eta_1 \otimes K_1,\ -\eta_2 \otimes K_1,\ \eta_3 \otimes K_1,\ \ldots,\ (-1)^{h-1}\eta_h \otimes K_1,$$

hat die Eigenschaften, dass $\dim(\eta_h \otimes K_1) \leq 1$ gilt und für $r = 2, \ldots, h$ die Form $\eta_{r-1} \otimes K_1$ ein Pfisternachbar mit Komplement $-\eta_r \otimes K_1$ ist. Insbesondere existiert ein $k \geq 2$ mit $\dim(\eta_{r-1} \perp -\eta_r) \leq 2^k < \dim(\varphi)$ für alle $r = 2, \ldots, h$. Nach Lemma 3.2.14 sind auch die Formen $\eta_{r-1} \perp -\eta_r$ für $r = 2, \ldots, h$ jeweils ähnlich einer Pfisterform. Also ist η_{r-1} ein Pfisternachbar mit Komplement η_r über K. Wir wissen bereits, dass φ ein Pfisternachbar mit Komplement $-\eta_1$ ist. Für die Sequenz

$$\varphi =: \eta_0,\ -\eta_1,\ \eta_2,\ -\eta_3,\ \ldots,\ (-1)^h \eta_h$$

gilt also $\dim(\eta_h) \leq 1$, und für $r = 1, \ldots, h$ ist η_{r-1} ein Pfisternachbar mit Komplement $-\eta_r$. Folglich ist φ exzellent. □

Bisher haben wir nur anisotrope Erweiterungen quadratischer Formen betrachtet. Es stellt sich die Frage, wie es mit den höheren anisotropen Kernen von isotropen Erweiterungen aussieht. Der folgende Satz liefert genau auf diese Frage eine Antwort, die es uns ermöglicht Proposition 3.2.10 und Theorem 3.2.15 auch auf isotrope Erweiterungen quadratischer Formen bzw. auf isotrope exzellente Formen anzuwenden.

3.2.16 Satz. *Sei φ eine ψ-Erweiterung der Ordnung s über K. Ist ψ isotrop, so sind die anisotropen Kerne von φ und $(-1)^s\psi$ isometrisch. Falls ψ anisotrop ist, so existiert ein $r \in \{1, \ldots, s\}$ mit $\varphi_{an} \cong (-1)^r \eta_r$. Insbesondere ist der anisotrope Kern einer exzellenten Form wieder exzellent.*

[HR93, Proposition 2.4]

Beweis. Ist φ anisotrop, so ist nichts zu zeigen. Sei φ also isotrop. Dann ist $\varphi \perp \eta_1$ ähnlich einer Pfisterform und somit hyperbolisch. Es folgt $\varphi \sim -\eta_1$. Über ein einfaches, induktives Argument folgt die Behauptung. □

3.2.4 Anatomie

Das folgende Lemma steht auch in ähnlicher Form als Corollary 3.3 in [HR93]. Dort wird allerdings nur der Spezialfall von exzellenten Formen betrachtet. Doch das Resultat ist allgemeiner für beliebige Pfisternachbarn gültig.

3.2.17 Lemma. *Für einen isotropen Pfisternachbarn φ gilt genau dann $i(\varphi) = 1$, wenn sein Komplement anisotrop ist und $\dim(\varphi) = 2^k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

Beweis. Sei ψ das Komplement von φ. Es gilt $\varphi \sim -\psi$, da die zu φ gehörige Pfisterform hyperbolisch ist. Ist $i(\varphi) = 1$, so folgt aus $\dim(\psi) \leq \dim(\varphi) - 2$ die Anisotropie von ψ. Also muss $\dim(\psi) = \dim(\varphi) - 2$ gelten. Da $\dim(\varphi \perp \psi)$ eine 2-er Potenz ist, folgt $\dim(\varphi) = 2^k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Sei umgekehrt $\dim(\varphi) = 2^k + 1$ und ψ anisotrop. Es ist φ eine ψ-Erweiterung vom Grad 1. Nach Satz 3.2.16 muss $\varphi_{an} \cong \psi$ gelten. Aus $\dim(\varphi \perp \psi) = 2^{k+1}$ folgt $i(\varphi) = 1$. □

Die *Stufe* eines Körper K ist definiert als die kleinste Zahl $s(k) \in \mathbb{N}$, so dass $-1 \in D_K^*(s \times \langle 1 \rangle)$ liegt. Ist -1 in K nicht als Summe von Quadraten darstellbar, so wird $s(K) := \infty$ gesetzt. Pfister hat bewiesen, dass die Stufe eines Körpers immer eine Potenz der 2 oder unendlich ist (siehe zum Beispiel [Pfi95, Theorem 1.3, Seite 42]). Mit den bisher erarbeiteten Hilfsmitteln ergibt sich ein alternativer Beweis dieses Resultats.

3.2.18 Theorem. *Die Stufe $s(K)$ eines Körpers K ist unendlich oder eine Potenz der 2.*

[HR93, Remark 3.4]

Beweis. Ist $s(K) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Sei $s = s(K) < \infty$. Nach Voraussetzung gilt $-1 \in D_K^*(s \times \langle 1 \rangle)$. Das heißt, es existiert eine Darstellung $s \times \langle 1 \rangle \cong \varphi \perp \langle -1 \rangle$ mit einer anisotropen Form φ. Also hat $(s+1) \times \langle 1 \rangle \cong \varphi \perp \mathbb{H}$ den Wittindex 1. Wie in Beispiel 3.2.13 zeigt man, dass $(s+1) \times \langle 1 \rangle$ ein Pfisternachbar ist. Somit existiert nach Lemma 3.2.17 ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\dim((s+1) \times \langle 1 \rangle) = 2^k + 1$. Es folgt $s = 2^k$. □

Weiterhin ist es uns möglich zu zeigen, dass zu jeder Potenz der 2 ein Körper mit entsprechender Stufe existiert. Es ist sicherlich $s(\mathbb{R}) = \infty$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $L = \mathbb{R}((2^k+1) \times \langle 1 \rangle)$. Nach dem Anisotropiekriterium 3.2.3 ist $(r \times \langle 1 \rangle)_L$ für alle $r \leq 2^k$ anisotrop. Per Definition ist aber $((2^k+1) \times \langle 1 \rangle)_L$ isotrop. Dies bedeutet $-1 \notin D_L(r \times \langle 1 \rangle)$ für alle $r < 2^k$ und $-1 \in D_L(2^k \times \langle 1 \rangle)$. Es folgt $s(L) = 2^k$.

Nun wollen wir induktiv Funktionen definieren, die uns zu einer exzellenten Form φ die Zahl $\operatorname{ord}(\varphi)$ und die Dimensionen der höheren Komplemente liefern. Sei

$$R : \mathbb{N}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto \left(k \in \mathbb{N} \;\middle|\; 2^{k-1} < n \leq 2^k\right), \tag{3.9}$$

und

$$C : \mathbb{N}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad n \longmapsto 2^{R(n)} - n$$

die *komplementäre Zahl* von n. Leicht sieht man, dass für einen n-dimensionalen Pfisternachbar φ gerade $2^{R(n)} = l(\varphi)$ die Stufe und $C(n)$ die Dimension des Komplements von φ ist.

Weiter definieren wir induktiv eine Funktion $H : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ durch

$$H(0) = H(1) = 0 \qquad \text{und} \qquad H(n) = H(C(n)) + 1 \quad \text{für } n \geq 2.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ fest. Für $j \in \{0, \ldots, H(n)\}$ definiere die Zahl $C_j(n)$ induktiv durch

$$C_0(n) = n \qquad \text{und} \qquad C_{j+1} = C(C_j(n)), \quad j = 0, \ldots, H(n) - 1.$$

3.2.19 Satz. *Sei φ eine exzellente Form der Dimension n über K, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\operatorname{ord}(\varphi) = H(n)$, und für jedes $r \in \{0, \ldots, \operatorname{ord}(\varphi)\}$ hat das r-te Komplement von φ die Dimension $C_r(n)$.*

Beweis. Zunächst beweisen wir die Behauptung über die Ordnung von φ per Induktion nach n. Für $n \leq 1$ ist die Behauptung trivial.

Sei $n \geq 2$, τ die zu φ gehörige Pfisterform und η das Komplement von φ. Es gilt $\dim(\eta) = C(n)$, und aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\operatorname{ord}(\varphi) \;=\; \operatorname{ord}(\eta) + 1 \;=\; H(C(n)) + 1 \;=\; H(n).$$

Für $n = 0, 1$ ist die Behauptung über die höheren Komplemente trivial. Betrachte ein festes $n > 1$. Wir verfahren per Induktion nach $r \in \{0, \ldots, \operatorname{ord}(\varphi)\}$. Ist $r = 0$, so ist $C_0(n) = n = \dim(\varphi)$.

Sei nun $0 < r \leq \operatorname{ord}(\varphi) = H(n)$. Sei das $(r-1)$-te und das r-te Komplement von φ über K jeweils durch η_{r-1} und η_r gegeben. Wir wissen, dass $\eta_{r-1} \perp -\eta_r$ ähnlich einer Pfisterform über K ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $C_{r-1}(n) = \dim(\eta_{r-1})$. Für die komplementäre Zahl gilt $C(\dim(\eta_{r-1})) = \dim(\eta_r)$. Wir erhalten

$$C_r(n) \;=\; C(C_{r-1}(n)) \;=\; C(\dim(\eta_{r-1})) \;=\; \dim(\eta_r).$$

$\square$

Der eben bewiesene Satz besagt, dass die Höhe und die Dimensionen der höheren anisotropen Kerne einer anisotropen, exzellenten Form φ bereits vollständig durch die Dimension von φ bestimmt sind.

3.2.20 Beispiele. (1) Sei K ein formal reeller Körper und $s \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.2.13 ist die Form $s \times \langle 1 \rangle$ exzellent. Somit ist auch $-(s \times \langle 1 \rangle)$ exzellent. Sei $\varphi = (-1)^\nu (s \times \langle 1 \rangle)$ mit $\nu \in \{0,1\}$. Sofort folgt, dass φ Höhe $H(s)$ hat. Nach Proposition 3.2.10 ist der r-te anisotrope Kern von φ über K durch $(-1)^{r+\nu}(C_r(n) \times \langle 1 \rangle)$ definiert.

(2) Wir wollen das Zerfällungsverhalten aller Formen über $\mathbb{R}$ bestimmen. Aus Beispiel 1.2.17 wissen wir, dass $W(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$ gilt. Dies bedeutet, dass eine beliebige anisotrope s-dimensionale Form φ über $\mathbb{R}$ isometrisch zu $(-1)^\nu (s \times \langle 1 \rangle)$ mit $\nu \in \{0,1\}$ ist, $s \in \mathbb{N}_0$. Mit Hilfe von Beispiel 3.2.13 sehen wir, dass jede Form über $\mathbb{R}$ exzellent ist, und aus (1) können wir das gesamte Zerfällungsverhalten von φ ablesen.

$\triangle$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir stellen die Frage, welche Dimension eine exzellente Form mit $R(n) = k$ haben muss, um unter diesen Formen maximale Höhe zu besitzen. Dazu definieren wir induktiv eine Abbildung $N_g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ durch

$$N_g(1) = 0, \qquad N_g(2) = 2 \qquad \text{und} \qquad N_g(k) = 2^k - N_g(k-1), \quad k \geq 3.$$

Wir definieren eine weitere Abbildung $N_u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$N_u(1) = 1 \qquad \text{und} \qquad N_u(k) = N_g(k) + (-1)^k.$$

3.2.21 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $0 \leq n < 2^k$ gilt grundsätzlich $H(n) \leq k-1$. Weiterhin ist $n = N_g(k)$ für $k > 2$ die eindeutige gerade Zahl mit $2^{k-1} < n < 2^k$, für die $H(n) = k-1$ gilt, und $n = N_u(k)$ ist für $k \geq 2$ die eindeutige ungerade Zahl mit $2^{k-1} < n < 2^k$, für die $H(n) = k-1$ gilt.*

Beweis. Wir verfahren per Induktion nach n. Für $n = 0, 1$ ist die erste Behauptung trivial, da $k \geq 1$ vorausgesetzt wurde. Sei also $n \geq 2$. Dann folgt $k \geq 2$. Ist n eine 2-er Potenz, so gilt $H(n) = 1 \leq k-1$. Wir schließen diesen Fall also aus. Sei k minimal mit $n < 2^k$. Dann ist $C(n) < 2^{k-1}$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$H(n) \;=\; H(C(n)) + 1 \;\leq\; (k-1) - 1 + 1 \;=\; k-1.$$

Damit wäre die erste Behauptung bewiesen.

Um den zweiten Teil der Behauptung zu zeigen, verwenden wir Induktion nach k. Es ist $N_u(2) = 3$, $H(3) = 1$ und 3 die einzige Zahl n mit $2 < n < 4$. Für $k = 2$ ist hiermit die Behauptung bewiesen. Weiterhin ist $H(5) = 2$, $H(6) = 2$ und $H(7) = 1$. Aus $N_g(3) = 6$ und $N_u(3) = 5$, folgt somit die Behauptung für $k = 3$.

Sei nun $k > 3$. Wir betrachten zunächst nur N_g. Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass $2^{k-2} < N_g(k-1) < 2^{k-1}$ gilt. Insbesondere ist $2^k > N_g(k) = 2^k - N_g(k-1) > 2^{k-1}$. Es folgt $C(N_g(k)) = 2^k - N_g(k) = N_g(k-1)$ und wir erhalten

$$H(N_g(k)) \;=\; H(C(N_g(k))) + 1 \;=\; H(N_g(k-1)) + 1 \;=\; (k-1) - 1 + 1 \;=\; k - 1. \quad (3.10)$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $m = N_g(k-1)$ die einzige natürliche Zahl mit $2^{k-2} < m < 2^{k-1}$ und $H(m) = k-2$. Nähmen wir an, es gäbe ein $r \neq N_g(k)$ mit $2^{k-1} < r < 2^k$ und $H(r) = k-1$, so erhielten wir den Widerspruch $H(2^k - r) = k-2$ zur Eindeutigkeit von $N_g(k-1)$.

Betrachte nun N_u. Man rechnet leicht nach, dass auch hier $N_u(k) = 2^k - N_u(k-1)$ gilt. Da sogar $2^k - 2 \geq N_g(k) \geq 2^{k-1} + 2$ gilt, erhalten wir $2^k > N_u(k) > 2^{k-1}$ und somit $C(N_u(k)) = 2^k - N_u(k) = N_u(k-1)$. Indem wir in Gleichung (3.10) alle N_g jeweils durch N_u ersetzen, erhalten wir die Behauptung $H(N_u(k)) = k-1$. Die Aussage über die Eindeutigkeit folgt analog wie für N_g. $\square$

Für eine anisotrope, exzellente Form der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Höhe durch $H(n)$ gegeben. Die Höhe einer beliebigen Form ist wesentlich schwieriger zu berechnen. Im Allgemeinen ist dies ein noch ungelöstes Problem. In [Hof95b, Lemma 3, Seite 470] zeigt Hoffmann, dass für eine anisotrope Form φ über K der Dimension $n = 2^k + m$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < m \leq 2^k$ grundsätzlich $1 \leq i_1(\varphi) \leq m$ gilt. Ist $i_1(\varphi) = m$, so sagen wir, φ habe *maximale Zerfällung*. Wir haben bereits gezeigt, dass anisotrope Pfisternachbarn grundsätzlich maximale Zerfällung besitzen. Folglich haben alle höheren Komplemente einer anisotropen, exzellenten Form φ maximale Zerfällung. Dies legt die Vermutung nahe, dass $h(\varphi) \leq h(\psi)$ für jede anisotrope Form ψ über K mit $\dim(\varphi) = \dim(\psi)$ gilt. Genau diese Vermutung haben Jürgen Hurrelbrink, Nikita A. Karpenko und Ulf Rehmann in [HKR04] bewiesen.

3.2.22 Theorem. *Für eine anisotrope, n-dimensionale Form ψ über K mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $h(\psi) \geq H(n)$.*

[HKR04, Theorem 1.1]

Sei φ eine beliebige ψ-Erweiterung der Ordnung $t \in \mathbb{N}$ über K und

$$\varphi = \eta_0,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_t = \psi$$

die zugehörige Sequenz höherer Komplemente von φ. Dann existiert für $r \in \{0, \ldots, t-1\}$ zum Pfisternachbar η_r eine eindeutig bestimmte Pfisterform τ_r über K.

Sei σ eine weitere Pfisterform über K. Dann ist sicherlich $\varphi \otimes \sigma$ eine $(\psi \otimes \sigma)$-Erweiterung, und es gilt $\mathrm{ord}(\varphi \otimes \sigma / \psi \otimes \sigma) = \mathrm{ord}(\varphi/\psi)$. Ferner ist für $r = 1, \ldots, t$ das r-te Komplement von $\varphi \otimes \sigma$ durch $\eta_r \otimes \sigma$ gegeben. Umgekehrt interessiert uns nun die Frage, welche Pfisterformen eine gegebene ψ-Erweiterung teilen.

3.2.23 Lemma. *Für alle $0 \leq i < j \leq t-1$ existiert eine Pfisterform ρ_{ij} mit $\dim(\rho_{ij}) > 1$ und $\tau_i \cong \tau_j \otimes \rho_{ij}$.*

[Kne77, Lemma 7.16, Seite 8]

Beweis. Wir betrachten zunächst nur den Fall $j = i+1$. Der allgemeine Fall folgt dann sofort per Induktion. Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $\dim(\tau_i) = 2^k$ und $\dim(\tau_j) = 2^l$. Sicherlich gilt $l < k$. Ist τ_i hyperbolisch, so wählen wir ρ_{ij} hyperbolisch mit $\dim(\rho_{ij}) = 2^{k-l}$ und erhalten $\tau_i \cong \tau_j \otimes \rho_{ij}$.

Sei nun τ_i anisotrop. Die Funktionenkörper $K(\tau_{i+1})$ und $K(\eta_{i+1})$ sind äquivalent über K. Weiterhin zerfällt $\tau_i \otimes K(\eta_{i+1})$ und somit auch $\tau_i \otimes K(\tau_{i+1})$, da τ_i und $\eta_i \perp \eta_{i+1}$ ähnlich sind. Nach den Sätzen 2.2.5 und 3.1.1 existiert eine Pfisterform ρ_{ij} mit $\tau_i \cong \tau_{i+1} \otimes \rho_{ij}$. □

3.2.24 Proposition. *Sei φ ein geradedimensionale ψ-Erweiterung über K mit $\dim(\varphi) \geq 2$ und $\operatorname{ord}(\varphi/\psi) = t \in \mathbb{N}$. Jede k-fache Pfisterform σ mit $k \in \mathbb{N}$, die φ teilt, teilt für alle $r \in \{0, \ldots, t-1\}$ auch das r-te Komplement η_r von φ. Ist φ exzellent, so gilt insbesondere $\sigma | \tau_{t-1}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion nach $t = \operatorname{ord}(\varphi/\psi)$. Für $t = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei $t \geq 1$. Ist τ_0 hyperbolisch, so wird τ_0 wegen $\dim(\sigma) < \dim(\tau_0)$ trivialerweise von σ geteilt. Es existieren also Formen τ_0' und φ' über K mit $\tau_0 \cong \tau_0' \otimes \sigma$ und $\varphi \cong \varphi' \otimes \sigma$. Nach Satz 3.1.1 kann τ_0' als Pfisterform gewählt werden, weshalb aus Dimensiongründen φ' ein Pfisternachbar von τ_0' ist. Sei η_1' das Komplement von φ'. Dann gilt

$$a\tau_0 \;\cong\; a\tau_0' \otimes \sigma \;\cong\; (\varphi' \perp \eta_1') \otimes \sigma \;\cong\; \varphi \perp (\eta_1' \otimes \sigma)$$

mit $a \in K^*$ und und es folgt $\eta_1' \otimes \sigma \cong \eta_1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt sofort die Behauptung.

Sei nun τ_0 anisotrop. Dann gilt $\sigma \otimes K(\sigma) \sim 0$ und somit nach Voraussetzung $\varphi \otimes K(\sigma) \sim 0$. Sofort folgt $\tau_0 \otimes K(\sigma) \sim 0$ und die Existenz einer Stelle $K(\varphi) \to K(\sigma)^\infty$. Wir erhalten

$$0 \;\sim\; \varphi \otimes K(\sigma) \;\sim\; -\eta_1 \otimes K(\sigma).$$

Nach Satz 2.2.5 teilt σ auch η_1. Die Form η_1 ist eine ψ-Erweiterung der Ordnung $\operatorname{ord}(\eta_1/\psi) = t - 1$. Wieder folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Behauptung. □

3.2.25 Proposition. *Sei φ eine geradedimensionale, exzellente Form über K mit $\dim(\varphi) \geq 2$. Dann existiert eine exzellente Form ψ über K mit $\varphi \cong \psi \otimes \tau_{t-1}$. Die Form ψ hat ungerade Dimension.*

[Kne77, Proposition 7.17 (ii), Seite 8]

Beweis. Wieder verfahren wir per Induktion[3] nach $t = \operatorname{ord}(\varphi) \in \mathbb{N}$. Die Behauptung ist für $t = 1$ trivial. Betrachte den Fall $t = 2$. Da φ gerade Dimension hat, ist $\dim(\eta_2) = 0$ und somit η_1 ähnlich der Pfisterform τ_1. Nach Lemma 3.2.23 existiert eine Pfisterform π mit $\dim(\pi) \geq 2$ und $\tau_0 \cong \pi \otimes \tau_1$. Ist τ_1 hyperbolisch, so auch τ_0, und da η_1 hyperbolisch ist, muss dies auch für φ gelten. Sofort folgt die Existenz einer Form ψ mit $\varphi \cong \psi \otimes \tau_1$. Sei nun τ_1 anisotrop. Es ist $\tau_0 \otimes K(\tau_1)$ hyperbolisch und $\varphi \otimes K(\tau_1)$ somit isotrop, weshalb eine Stelle $K(\varphi) \to K(\tau_1)^\infty$ existiert. Hieraus folgt

$$\varphi \otimes K(\tau_1) \;\sim\; -\eta_1 \otimes K(\tau_1) \sim 0.$$

Nach Satz 2.2.5 existiert auch in diesem Fall eine Form ψ mit $\varphi \cong \psi \otimes \tau_1$. In jedem Fall ist

$$\dim(\psi) \;=\; \frac{\dim(\tau_0)}{\dim(\tau_1)} - 1 \;=\; \dim(\pi) - 1.$$

Da π von gerader Dimension ist, hat ψ ungerade Dimension.

[3]Knebusch hat in seinem Beweis die Induktionsvoraussetzung $t = 2$ vergessen. Diese wird allerdings benötigt, da der Induktionsschritt von Knebusch nur für $t > 2$ funktioniert.

Sei nun $t > 2$ und $a \in D_K^*(\eta_1)$ mit $\varphi \perp \eta_1 \cong a\tau_0$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine exzellente Form ζ ungerader Dimension, so dass $\eta_1 \cong \tau_{t-1} \otimes \zeta$ gilt. Sei σ die zu ζ gehörige Pfisterform, χ das Komplement von ζ und $b \in D_K^*(\zeta)$ mit $\zeta \perp \chi \cong b\sigma$. Da ζ ein Pfisternachbar von σ ist, muss η_1 ein Pfisternachbar von $\tau_{t-1} \otimes \sigma$ sein. Aus der Eindeutigkeit der zu η_1 gehörigen Pfisterform folgt $\tau_1 \cong \tau_{t-1} \otimes \sigma$. Nach Lemma 3.2.23 existiert eine Pfisterform π mit $\dim(\pi) \geq 2$ und

$$\tau_0 \;\cong\; \pi \otimes \tau_1 \;\cong\; \pi \otimes \sigma \otimes \tau_{t-1}.$$

Aus $t > 2$ folgt[4] $\dim(\eta_2) \geq 2$ und somit $\zeta \subsetneq b\sigma$. Also ist ζ eine Teilform von $b\pi \otimes \sigma$ mit $2\dim(\zeta) < \dim(\pi \otimes \sigma)$. Sei dann ψ der Pfisternachbar von $\pi \otimes \sigma$ mit $\psi \perp \zeta \cong b\pi \otimes \sigma$. Da ζ exzellent und $\dim(\zeta)$ ungerade ist, ist auch ψ exzellent mit ungerader Dimension. Durch Multiplikation von τ_{t-1} erhalten wir

$$(\tau_{t-1} \otimes \psi) \perp \eta_1 \;\cong\; b\pi \otimes \sigma \otimes \tau_{t-1} \;\cong\; b\tau_0.$$

Aus den Beobachtungen im Absatz nach Definition 2.2.8 folgt $b\tau_0 \cong a\tau_0$ und somit die Behauptung $\tau_{t-1} \otimes \psi \cong \varphi$. □

3.2.26 Proposition. *Sei φ eine exzellente Form mit $\dim(\varphi) \geq 2$ und $t = \mathrm{ord}(\varphi) \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq t$.*

(1) Ist r ungerade, so ist $\varphi \perp \eta_r$ exzellent und ein Pfisternachbar von τ_0.

(2) Falls r gerade ist, existiert eine exzellente Form ψ mit $\varphi \cong \psi \perp \eta_r$. Ist $r = 2$ und $\dim(\tau_0) = 2\dim(\tau_1)$, so sind ψ und τ_1 ähnlich. Andernfalls ist ψ ein Pfisternachbar von τ_0.

[Kne77, Proposition 7.18, Seite 9]

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach r. Sei $a \in D_K^*(\eta_1)$. Der Induktionsanfang $r = 1$ ist trivial. Als nächstes behandeln wir den Fall, dass $r = 2$ und $\dim(\tau_0) = 2\dim(\tau_1)$ gilt. Nach Lemma 3.2.23 existiert ein $c \in K^*$ mit $\tau_0 \cong \tau_1 \perp c\tau_1$. Weiterhin gilt $\varphi \perp \eta_1 \cong a\tau_0$ und $\eta_1 \perp \eta_2 \cong a\tau_1$. Es folgt

$$\varphi \perp \eta_1 \;\cong\; a\tau_1 \perp ac\tau_1 \;\cong\; \eta_1 \perp \eta_2 \perp ac\tau_1.$$

Witts Kürzungssatz 1.1.17 liefert $\varphi \cong ac\tau_1 \perp \eta_2$.

Von nun an sei $r \geq 2$. Wir schließen den Fall $r = 2$ und $\dim(\tau_0) = 2\dim(\tau_1)$ aus. Sei zunächst r gerade. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\chi := \eta_1 \perp \eta_r$ exzellent und ein Pfisternachbar von τ_1. Ist τ_0 hyperbolisch, so existiert wegen $\dim(\chi) < \frac{1}{2}\dim(\tau_0)$ sicherlich eine Form ψ mit $\chi \perp \psi \cong a\tau_0$. Sei τ_0 nun anisotrop. Da die Funktionenkörper von χ und τ_1 äquivalent sind, folgt aus Lemma 3.2.23, dass $\tau_0 \otimes K(\chi)$ zerfällt. Es gibt also in jedem Fall eine Form ψ über K mit

$$\varphi \perp \eta_1 \;\cong\; a\tau_0 \;\cong\; \chi \perp \psi \;\cong\; \eta_1 \perp \eta_r \perp \psi.$$

Hieraus folgt $\varphi \cong \psi \perp \eta_r$. Ist $t > 2$, so gilt sicherlich $\dim(\chi) < \dim(\tau_1)$, weshalb ψ ein Pfisternachbar von τ_0 ist. Im Fall $t = 2$ haben wir die Möglichkeit $\dim(\tau_0) = 2\dim(\tau_1)$ bereits ausgeschlossen, weshalb auch hier ψ ein Pfisternachbar ist. Die Form ψ ist exzellent, da ihr Komplement χ exzellent ist.

[4] Genau an dieser Stelle ist die Voraussetzung $t > 2$ unbedingt notwendig, da für $t = 2$ wie bereits zuvor festgestellt $\dim(\eta_2) = 0$ gilt.

Schließlich sei r ungerade und also $r \geq 3$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine exzellente Form χ über K mit $\eta_1 \cong \chi \perp \eta_r$. Es folgt $(\varphi \perp \eta_r) \perp \chi \cong a\tau_0$. Sicherlich ist $\varphi \perp \eta_r$ ein Pfisternachbar von τ_0, der zudem exzellent ist, weil χ bereits exzellent ist. $\square$

Sei φ eine exzellente Form ungerader Dimension mit $\dim(\varphi) \geq 3$, Komplement η_1 und Höhe h. Weiterhin sei τ_0 die zu φ und τ_1 die zu η_1 gehörige Pfisterform. Ist φ anisotrop, so wissen wir, dass $\ker_h(\varphi)$ über K durch $\langle d(\varphi)\rangle$ definiert ist. Wir benötigen eine ähnliche Aussage für den allgemeinen Fall.

3.2.27 Lemma. *Sei φ eine exzellente Form ungerader Dimension $n \geq 3$ über K, und sei $t = \mathrm{ord}(\varphi) \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\eta_t \cong (-1)^t \langle d(\varphi)\rangle$.*

Beweis. Wir verfahren per Induktion nach t. Für $t = 1$ existiert ein $l \in \mathbb{N}$, eine l-fache Pfisterform σ über K und ein $a \in K^*$ mit $\varphi \cong a\sigma_p$. Aus $n \geq 3$ folgt $l \geq 2$ und somit $d(a\sigma) = 1$. Nach Lemma 2.2.13 gilt $\eta_1 \cong \langle -d(\varphi)\rangle$.

Sei nun $t > 1$. Es ist $\mathrm{ord}(\eta_1) = t - 1$. Sei χ das $\mathrm{ord}(\eta_1)$-te Komplement von η_1. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\chi \cong (-1)^{\mathrm{ord}(\eta_1)} \langle d(\eta_1)\rangle$. Da φ ungerade Dimension hat, folgt aus Lemma 2.2.13 die Behauptung $\eta_t \cong \chi \cong (-1)^t \langle d(\varphi)\rangle$. $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus Proposition 3.2.26 ergibt sich mit Hilfe des eben bewiesenen Lemmas das folgende Korollar.

3.2.28 Korollar. *Sei φ eine ungeradedimensionale, exzellente Form über K mit $\dim(\varphi) \geq 3$. Ist $\mathrm{ord}(\varphi)$ ungerade, so ist $\varphi \perp -\langle d(\varphi)\rangle$ exzellent und ein Pfisternachbar von τ_0. Falls $\mathrm{ord}(\varphi)$ gerade ist, existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \psi \perp \langle d(\varphi)\rangle$ mit einer exzellenten Form ψ über K. Ist $\dim(\varphi) = 2^k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$, so sind ψ und τ_1 ähnlich. Andernfalls ist ψ ein Pfisternachbar von τ_0.*

3.2.5 Exzellente Formen der Dimension ≤ 12

Im Folgenden wollen wir exzellente Formen charakterisieren, deren Dimension nicht größer als 12 ist. Sei φ eine Form über K. Ist $n := \dim(\varphi) \leq 1$, so folgt die Exzellenz von φ direkt aus Definition 3.2.11. Gilt $\varphi \cong \langle a, b\rangle$ mit $a, b \in K^*$, so ist $\varphi \cong a\langle 1, ab\rangle$ ähnlich einer Pfisterform und somit exzellent. Sei nun $\dim(\varphi) = 3$ und $a, b, c \in K^*$ mit $\varphi \cong a\langle 1, b, c\rangle$. Dann ist φ ein Pfisternachbar von $\langle\langle b, c\rangle\rangle$ mit Komplement $a\langle bc\rangle$, also exzellent.

Ist $\dim(\varphi) = 4$, so ist φ genau dann exzellent, wenn φ ähnlich einer Pfisterform ist. Wenn φ ähnlich einer Pfisterform ist, so gilt $d(\varphi) = 1$ nach Beispiel 1.2.23. Sei andererseits $d(\varphi) = \det(\varphi) = 1$. Es existieren $a, b, c, d \in K^*$ mit $\varphi \cong a\langle 1, b, c, d\rangle$. Nach Lemma 1.1.16 können wir $d = bc$ wählen. Somit ist φ ähnlich einer Pfisterform. Dies bedeutet, dass φ genau dann exzellent ist, wenn $d(\varphi) = 1$ gilt.

3.2.29 Proposition. $(\dim(\varphi) \leq 4)$
Jede Form φ der Dimension $n \leq 3$ über K ist exzellent. Eine 4-dimensionale Form φ über K ist genau dann exzellent, wenn $d(\varphi) = 1$ gilt.

Wir schieben den Fall $\dim(\varphi) = 8$ ein. Sei zunächst φ exzellent. Dann ist φ ähnlich einer 3-fachen Pfisterform, weshalb $\varphi \Subset I^3(K)$ gilt. Es folgt $d(\varphi) = 1$, und nach Proposition 1.3.25 gilt außerdem $c(\varphi) = 1$.

Umgekehrt setzen wir nun $d(\varphi) = 1$ und $c(\varphi) = 1$ voraus. Ist φ hyperbolisch, so ist φ wegen $\dim(\varphi) = 8$ trivialerweise exzellent. Sei nun $\varphi \not\sim 0$. Dann folgt aus Satz 2.2.25, dass $\deg(\varphi) \geq 3$ sein muss. Aus Dimensionsgründen folgt $\deg(\varphi) = 3$, und wir sehen sofort, dass φ ähnlich einer 3-fachen Pfisterform und somit exzellent sein muss.

3.2.30 Proposition. ($\dim(\varphi) = 8$)
Eine 8-dimensionale Form φ über K ist genau dann exzellent, wenn $d(\varphi) = 1$ und $c(\varphi) = 1$ gilt.

Sei nun $\dim(\varphi) = 5$. Aus Beispiel 1.3.20 (1) und Korollar 1.3.23 (2) folgt, dass es immer möglich ist, $c(\varphi)$ durch ein Produkt von maximal 2 Quaternionenalgebren zu repräsentieren. Ist φ anisotrop, so muss φ wegen Theorem 2.2.22 Höhe 2 haben, und es gilt $i_1(\varphi) = i_2(\varphi) = 1$. Klar ist, dass jeder 5-dimensionale Pfisternachbar exzellent ist, da sein Komplement Dimension 3 hat und somit auf jeden Fall exzellent ist.

3.2.31 Proposition. ($\dim(\varphi) = 5$)
Für eine Form φ über K mit $\dim(\varphi) = 5$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Form φ ist exzellent.

(ii) Es gilt $\langle d(\varphi)\rangle \subset \varphi$.

(iii) Die Clifford-Invariante $c(\varphi)$ wird durch eine Quaternionenalgebra repräsentiert.

[Kne77, Seite 10]

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist φ isotrop, so auch universell und die Behauptung trivial. Falls φ anisotrop ist, folgt die Behauptung aus Korollar 3.2.28.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \langle d(\varphi)\rangle \perp \chi$ mit $a \in K^*$ und einer geeigneten 4-dimensionalen Form χ über K. Es muss $d(\chi) = \det(\chi) = 1$ gelten. Nach Korollar 1.3.23 gilt

$$c(\varphi) \ = \ c(\langle d(\varphi)\rangle) \cdot c(-d(\varphi)\chi) \ = \ c(-d(\varphi)\chi).$$

Da auch $-d(\varphi)\chi$ die Diskriminante 1 hat, folgt aus Beispiel 1.3.20 (3), dass $c(\varphi)$ durch eine Quaternionenalgebra repräsentiert wird.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es werde $c(\varphi)$ durch eine Quaternionenalgebra $\left(\frac{-b,-c}{K}\right)$ respräsentiert. Sei $\tau = \langle\langle b, c\rangle\rangle$. Nach Korollar 1.3.23 (2) ist $c(\tau_p) = c(\tau) = c(\varphi)$. Dann hat die Form $\psi := \varphi \perp d(\varphi)\tau_p$ die Diskriminante $d(\psi) = 1$ und die Clifford-Invariante

$$c(\psi) \ = \ c(\varphi) \cdot c(d(\varphi)\tau_p) \cdot \left[\left(\frac{d(\varphi), -d(\varphi)}{K}\right)\right] \ = \ c(\varphi) \cdot c(\varphi) \ = \ 1$$

nach den Sätzen 1.3.21 (1) und 1.3.22 (1). Also ist ψ ähnlich einer 8-fachen Pfisterform und φ somit exzellent. $\square$

Ist φ eine 5-dimensionale, exzellente Form über K, so ist $\mathrm{ord}(\varphi) = 2$. Nach Korollar 3.2.28 existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \psi \perp \langle d(\varphi)\rangle$, wobei ψ ähnlich einer 2-fachen Pfisterform ist. Diese Form ψ ist genau die Form χ aus dem vorherigen Beweis.

3.2.32 Proposition. ($\dim(\varphi) = 6$)
Sei φ eine Form über K mit $\dim(\varphi) = 6$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Form φ ist exzellent.

(ii) Die Form $\langle 1, -d(\varphi)\rangle$ teilt φ.

(iii) Es wird φ von einer binären Form $\langle 1, -c\rangle$ mit $c \in K^*$ geteilt.

(iv) Es ist $K(\sqrt{d})$ mit $[d]^\square = d(\varphi)$ ein Zerfällungskörper von $c(\varphi)$.

Ist φ anisotrop, so sind die Aussagen (i) - (iv) ebenfalls äquivalent zu:

(v) Es gilt $i_1(\varphi) = 2$.

[Kne77, Seite 10]

Beweis. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial. Ist φ anisotrop und exzellent, so ist $\ker_1(\varphi)$ über K durch das 2-dimensionale Komplement von φ definiert. Hieraus ergibt sich Folgerung (i) $\Rightarrow$ (v).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Ist φ exzellent, so wird $\ker_1(\varphi)$ durch eine 2-dimensionale Form $\eta = a\langle 1, b\rangle$ über K definiert, $a, b \in K^*$. Da die Diskriminante auf $I(K)$ ein Homomorphismus ist und $d(\varphi \perp \eta) = 1$ gilt, muss $d(\eta) = d(\varphi)$ gelten. Wir können also $[b]^\square = -d(\varphi)$ wählen. Nach Proposition 3.2.25 wird φ von $\langle 1, -d(\varphi)\rangle$ geteilt.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Es ist $\varphi \cong \chi \perp -c\chi$ mit einer 3-dimensionalen Form χ über K. Für die Diskriminante von φ gilt also $d(\varphi) = [-1]^\square [-c]^\square (\det(\chi))^2 = [c]^\square$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): Es ist $\varphi \otimes K(\sqrt{d})$ hyperbolisch und somit $c(\varphi \otimes K(\sqrt{d})) = c(\varphi) \otimes K(\sqrt{d})$ trivial. Das heißt, dass $K(\sqrt{d})$ ein Zerfällungskörper von $c(\varphi)$ ist.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Ist φ hyperbolisch, so mit Sicherheit auch exzellent. Wir können diesen Fall entsprechend ausschließen. Die Invarianten $d(\varphi_{an}) = d(\varphi)$ und $c(\varphi_{an}) = c(\varphi)$ werden über $L := K(\sqrt{d})$ trivial. Nach Satz 2.2.25 (1) ist $\deg(\varphi_{an} \otimes L) \geq 3$. Aus Dimensiongründen zerfällt $\varphi_{an} \otimes L$. Ist $d(\varphi) = 1$, so ist $L = K$ und somit $\varphi_{an} \sim 0$. Diesen Fall hatten wir aber ausgeschlossen, weshalb $d(\varphi) \neq 1$ gelten muss. Weiterhin existiert nach Satz 1.2.5 eine Form χ über K mit $\varphi_{an} \cong \langle 1, -d\rangle \otimes \chi$. Wir nehmen an, es gelte $\dim(\chi) = 2$. Dann folgt der Widerspruch

$$d(\chi \perp -d\chi) \;=\; (\det(\chi))^2 \;=\; 1.$$

Also muss χ Dimension 1 oder 3 haben. Ist $\dim(\chi) = 1$, so ist

$$\varphi \;\cong\; a\langle 1, -d\rangle \perp (2 \times \mathbb{H}) \;\cong\; a\langle 1, -d\rangle \perp \langle 1, -1, -d, d\rangle \;\cong\; \langle 1, -d\rangle \otimes \langle a, 1, -1\rangle$$

mit $a \in K^*$. Also teilt $\langle 1, -d\rangle$ die Form φ in jedem Fall.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Ist $\varphi \cong \langle 1, -c\rangle \otimes \psi$ mit einer geeigneten Form ψ über K, so ist ψ exzellent, da $\dim(\psi) = 3$ gilt. Also ist auch φ als Produkt einer exzellenten Form mit einer Pfisterform exzellent.

(v) $\Rightarrow$ (iv): Sei φ anisotrop und $i_1(\varphi) = 2$. Hieraus folgt $\deg(\varphi) = 1$ und somit $d(\varphi) \neq 1$ nach Satz 2.2.25 (2). Sei $d \in d(\varphi)$ und $L = K(\sqrt{d})$. Wir nehmen an, L sei kein Zerfällungskörper von $c(\varphi)$. Es gilt $d(\varphi_L) = 1$ und $c(\varphi_L) \neq 1$. Aus Satz 2.2.25 (3) folgt $\deg(\varphi_L) = 2$. Nach Korollar 2.2.24 existiert ein $r \in \{0, 1\}$ mit $\dim(\ker_r(\varphi)) = 4$. Dies ist aber unmöglich, weshalb L ein Zerfällungskörper von $c(\varphi)$ sein muss. $\square$

Sei φ exzellent und $\dim(\varphi) = 7$. Dann existiert ein $a \in D_K^*(\varphi)$ und eine 3-fache Pfisterform τ über K, so dass $\varphi \cong a\tau_p$ gilt. Da $a\tau$ exzellent ist und $\dim(a\tau) = 8$ gilt, ist $c(a\tau) = 1$. Nach Satz 1.3.21 gilt

$$1 \;=\; c(a\tau) \;=\; c(\varphi) \cdot c(\langle a\rangle) \cdot \left[\left(\frac{-a, a}{K}\right)\right] \;=\; c(\varphi).$$

Wir gehen umgekehrt davon aus, dass $\dim(\varphi) = 7$ und $c(\varphi) = 1$ gilt. Betrachte die Form $\chi := \varphi\perp - \langle d(\varphi)\rangle$. Es ist $\det(\varphi) = -d(\varphi)$ und also $d(\chi) = 1$. Weiterhin gilt

$$c(\chi) \;=\; c(\varphi) \cdot c(\langle -d(\varphi)\rangle) \cdot \left[\left(\frac{d(\varphi), -d(\varphi)}{K}\right)\right] \;=\; c(\varphi) \;=\; 1.$$

Somit ist χ ähnlich einer Pfisterform.

3.2.33 Proposition. $(\dim(\varphi) = 7)$
Eine 7-dimensionale Form φ über K ist genau dann exzellent, wenn $c(\varphi) = 1$ gilt.

Sei φ wieder exzellent und diesmal $\dim(\varphi) = 9$. Dann ist $\mathrm{ord}(\varphi)$ gerade und nach Korollar 3.2.28 gilt $\langle d(\varphi)\rangle \subset \varphi$. Weiterhin existiert eine Form χ über K, die ähnlich einer 3-fachen Pfisterform ist, mit $\varphi \cong \chi\perp\langle d(\varphi)\rangle$. Es ist $c(-d(\varphi)\chi) = 1$, und nach Korollar 1.3.23 (2) gilt

$$c(\varphi) \;=\; c(\langle d(\varphi)\rangle) \cdot c(-d(\varphi)\chi) \;=\; 1. \tag{3.11}$$

Es gelte umgekehrt $c(\varphi) = 1$ und $\varphi \cong \chi\perp\langle d(\varphi)\rangle$, wobei $\dim(\varphi) = 9$ vorausgesetzt sei. Dann muss $d(\chi) = 1$ gelten. Weiterhin gilt die Gleichung (3.11). Also ist $-d(\varphi)\chi$ und somit auch χ ähnlich einer Pfisterform. Offensichtlich folgt die Exzellenz von φ.

3.2.34 Proposition. $(\dim(\varphi) = 9)$
Eine Form φ über K mit $\dim(\varphi) = 9$ ist genau dann exzellent, wenn $\langle d(\varphi)\rangle \subset \varphi$ und $c(\varphi) = 1$ gilt.

Sei nun $\zeta \cong \langle 1, a\rangle$ mit $a \in K^*$ eine 2-dimensionale Pfisterform und χ eine 5-dimensionale exzellente Form über K. Dann existiert eine Zerlegung $\chi \cong b\tau\perp\langle d(\chi)\rangle$ mit einer 2-fachen Pfisterform τ über K und $b \in K^*$. Wir erhalten

$$\zeta \otimes \chi \;\cong\; b(\langle 1, a\rangle \otimes \tau)\perp d(\chi)\zeta.$$

Da die Diskriminante auf $I(K)$ ein Homomorphismus und auf $I^2(K)$ trivial ist, gilt

$$d(\zeta \otimes \chi) \;=\; d(b(\langle 1, a\rangle \otimes \tau)\, d(d(\chi)\zeta) \;=\; d(d(\chi)\zeta). \tag{3.12}$$

Für die Clifford-Invariante von $\zeta \otimes \chi$ gilt nach Korollar 1.3.23 (1)

$$c(\zeta \otimes \chi) \;=\; c\big(d(\zeta)b(\langle 1, a\rangle \otimes \tau)\big) \cdot c(d(\chi)\zeta) \;=\; c(d(\chi)\zeta), \tag{3.13}$$

da die Clifford-Invariante auf $I^3(K)$ trivial ist.

3.2.35 Proposition. $(\dim(\varphi) = 10)$
Eine 10-dimensionale Form φ über K ist genau dann exzellent, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt.

(i) Die Form φ wird von $\langle 1, -d(\varphi)\rangle$ geteilt. Dies impliziert, dass $K(\sqrt{d})$ mit $d \in d(\varphi)$ ein Zerfällungskörper von $c(\varphi)$ ist.

(ii) Es enthält φ eine eindeutige Form η mit $\dim(\eta) = 2$, $d(\eta) = d(\varphi)$ und $c(\eta) = c(\varphi)$.

[Kne77, Seite 11]

Beweis. Ist φ exzellent, so existiert nach Proposition 3.2.25 eine 5-dimensionale exzellente Form χ über K und ein $c \in K^*$, so dass $\varphi \cong \langle 1, -c\rangle \otimes \chi$ gilt. Dabei ist

$$d(\varphi) \;=\; [-1]^{\square}\,[-c]^{\square}\,(\det(\chi))^2 \;=\; [c]^{\square}\,.$$

Wir setzen $\eta := d(\chi)\langle 1, -d(\varphi)\rangle$. Da χ exzellent ist, gilt $\langle d(\chi)\rangle \subset \chi$ und somit $\eta \subset \varphi$. Ferner folgt aus den Gleichungen (3.12) und (3.13), dass $d(\varphi) = d(\eta)$ und $c(\varphi) = c(\eta)$ gilt. Nach Proposition 1.3.27 ist η eindeutig bestimmt.

Sei umgekehrt $\varphi \cong \langle 1, -d(\varphi)\rangle \otimes \chi$ mit einer 5-dimensionalen Form χ über K. Dann gilt

$$c(\varphi) \;=\; c(\chi)\cdot c(-d(\varphi)\chi)\cdot \left[\left(\frac{d(\chi), -d(\chi)d(\varphi)}{K}\right)\right] \;=\; \left[\left(\frac{d(\chi), -d(\chi)d(\varphi)}{K}\right)\right].$$

Weiterhin existiert eine Zerlegung $\varphi \cong \psi \perp \eta$ mit $\dim(\eta) = 2$, $d(\varphi) = d(\eta)$ und $c(\varphi) = c(\eta)$. Für $\zeta := d(\chi)\langle 1, -d(\varphi)\rangle$ gilt offensichtlich $d(\eta) = d(\varphi) = d(\zeta)$, und nach Beispiel 1.3.20 gilt auch $c(\eta) = c(\varphi) = c(\zeta)$. Aus Proposition 1.3.27 folgt $\eta \cong d(\chi)\langle 1, -d(\varphi)\rangle \subset \langle 1, -d(\varphi)\rangle \otimes \chi$ und somit $\langle d(\chi)\rangle \subset \chi$. Nach Proposition 3.2.31 ist χ und folglich auch φ exzellent. □

Als nächstes müssen wir uns kurz mit der Clifford-Invariante von Formen beschäftigen, die ähnliche einer k-fachen Pfisterform mit $k \geq 2$ sind. Das folgende Resultat folgt für $k \geq 3$ direkt aus Proposition 1.3.25.

3.2.36 Lemma. *Sei τ eine k-fache Pfisterform über K mit $k \geq 2$. Dann gilt $c(\tau) = c(a\tau)$ für alle $a \in K^*$.*

Beweis. Aus den Sätzen 1.3.21 und 1.3.22 und Lemma 2.2.13 folgt

$$c(a\tau) \;=\; c(a\tau_p \perp \langle a\rangle) \;=\; c(a\tau_p)\cdot c(\langle a\rangle)\cdot \left[\left(\frac{-a, a}{K}\right)\right] \;=\; c(\tau_p)\cdot c(\langle 1\rangle)\cdot \left[\left(\frac{-1, 1}{K}\right)\right] \;=\; c(\tau),$$

da $c(\langle a\rangle) = [K] = c(\langle 1\rangle)$ gilt. □

Sei $\dim(\varphi) = 12$. Ist φ exzellent, so existiert nach Proposition 3.2.25 eine 2-fache Pfisterform τ über K und eine 3-dimensionale Form $\chi \cong a\langle 1, b_1, b_2\rangle$ über K mit $a, b_1, b_2 \in K^*$ und $\varphi \cong \tau \otimes \chi$. Dann gilt

$$c(\varphi) \;=\; c(a\langle 1, b_1\rangle \otimes \tau)\cdot c(ab_2\tau) \;=\; c(\tau),$$

nach Lemma 3.2.36, und da die Clifford-Invariante auf $I^2(K)$ ein Homomorphismus ist.

Existiert umgekehrt eine 2-fache Pfisterform τ und eine 3-dimensionale Form χ mit $\varphi \cong \tau \otimes \chi$, so ist φ exzellent, da dies auf jeden Fall für χ gilt.

3.2.37 Proposition. ($\dim(\varphi) = 12$)
Sei φ eine 12-dimensionale Form über K. Dann ist φ genau dann exzellent, wenn eine 2-fache Pfisterform τ existiert, die φ teilt. In diesem Fall ist $c(\varphi) = c(\tau)$.

Abschließend betrachten wir eine 11-dimensionale Form φ. Sei zunächst φ exzellent. Es ist $\operatorname{ord}(\varphi) = 3$. Nach Korollar 3.2.28 ist $\psi := \varphi \perp -\langle d(\varphi)\rangle$ exzellent. Es existiert also eine 2-fache Pfisterform τ über K und eine 3-dimensionale Form χ über K mit $\psi \cong \tau \otimes \chi$ so, dass $c(\psi) = c(\tau)$ gilt. Wir erhalten

$$c(\tau) \;=\; c(\psi) \;=\; c(\varphi) \cdot c(-\langle d(\varphi)\rangle) \cdot \left[\left(\frac{d(\varphi), -d(\varphi)}{K}\right)\right] \;=\; c(\varphi).$$

Gehen wir andererseits davon aus, dass ψ exzellent ist. Dann existieren zwei 2-fache Pfisterformen τ, σ über K und ein $a \in K^*$ mit $\psi \cong a\tau \otimes \sigma_p$. Also ist φ ein Nachbar von $\tau \otimes \sigma$ mit Komplement $\eta := -\langle d(\varphi)\rangle \perp a\tau$. Da η exzellent ist, wie man leicht sieht, ist auch φ exzellent.

3.2.38 Proposition. ($\dim(\varphi) = 11$)
Eine Form φ über K mit $\dim(\varphi) = 11$ *ist genau dann exzellent, wenn $\varphi \perp -\langle d(\varphi)\rangle$ exzellent ist.*

Kapitel 4

Anwendungen

4.1 Isotropieverhalten von Formen der Dimension ≤ 6

Eine der allgemeinsten Fragen der Theorie der generischen Zerfällung ist die folgende: Gegeben seien zwei Formen φ und ψ über K. Ist $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop? Hieraus ergibt sich die Frage, für welche ψ die Form $\varphi \otimes K(\psi)$ überhaupt isotrop wird. In diesem Abschnitt geben wir eine vollständige Antwort auf diese Frage für $\dim(\varphi) \leq 5$. Ist $\dim(\varphi) = 6$, so gelingt uns wenigstens eine teilweise Beantwortung dieser Frage.

Als Grundlagen für den ersten Unterabschnitt reichen noch die bisher erarbeiteten Resultate. Unter der Voraussetzung, dass ψ nicht ähnlich einer Pfisterform ist, können wir zeigen, dass $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop ist, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist. Wir behandeln auch den einfachen Fall, dass ψ ähnlich einer Pfisterform ist.

Der zweite Unterabschnitt beschäftigt sich ausschließlich mit Albert-Formen. Dies sind 6-dimensionale Formen, deren Äquivalenzklassen in $I^2(K)$ liegen. Unter der Voraussetzung, dass ψ nicht ähnlich einer 2-fachen Pfisterform ist, können wir auch für diese Klasse von Formen zeigen, dass $\varphi \otimes K(\psi)$ mit $\dim(\varphi) = 6$ und $\varphi \Subset I^2(K)$ genau dann isotrop ist, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist. Ein analoges Resultat erhalten wir dann im dritten Unterabschnitt für den Fall, dass φ eine anisotrope, 5-dimensionale Form über K ist, die kein Pfisternachbar ist.

Der letzte Unterabschnitt behandelt zunächst ein Resultat, dass Kriterien für ψ liefert, die hinreichend für die Anisotropie von $\varphi \otimes K(\psi)$ sind, falls $\dim(\varphi) = 6$ ist. Fortan betrachten wir ausschließlich 6-dimensionale anisotrope Formen φ, die über der quadratischen Erweiterung $K(\sqrt{d})$ mit $d \in d(\varphi)$ isotrop werden. Unter der Voraussetzung $\dim(\psi) \neq 4$ gelingt es uns für diese Klasse von Formen notwendige und hinreichende Voraussetzungen an ψ zu erarbeiten, für die $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop ist.

4.1.1 Formen der Dimension ≤ 4

Seien φ und ψ anisotrope Formen über K. Ist $\dim(\psi) = 1$, so bleibt $\varphi \otimes K(\psi)$ anisotrop, da per Definition $K(\psi) = K$ gilt. Fortan wollen wir diesem Spezialfall keine weitere Aufmerksamkeit schenken und grundsätzlich davon ausgehen, dass $\dim(\psi) \geq 2$ ist.

4.1.1 Satz. *Sei φ eine anisotrope Form über K mit $\dim(\varphi) = 2$. Für eine anisotrope Form ψ ist $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop, wenn φ und ψ ähnlich sind.*

Beweis. Den Fall $\dim(\psi) = 1$ haben wir bereits besprochen. Ist $\dim(\psi) = 2$, so können wir annehmen, dass $\psi \cong \langle 1, -d\rangle$ für ein $d \in K^*$ gilt, da die Funktionenkörper ähnlicher Formen isomorph sind. Nach Beispiel 2.1.21 ist $K(\psi)_s \cong K(\sqrt{d})$. Ist $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop, so ist φ nach Satz 1.2.5 ähnlich der Form ψ. Sind umgekehrt φ und ψ ähnlich, so ist $\varphi \otimes K(\psi)$ trivialerweise isotrop.

Sei nun $\dim(\psi) \geq 3$. Wir nehmen an, $\varphi \otimes K(\psi)$ sei isotrop und somit hyperbolisch. Nach Satz 2.2.4 ist ψ ähnlich einer Teilform von φ. Dies ist unmöglich, da $\dim(\psi) > \dim(\varphi)$ vorausgesetzt wurde. □

Sei nun $\dim(\varphi) = 3$. Dann existieren $x, y, z \in K^*$ mit $\varphi \cong \langle x, y, z\rangle \cong xyz\langle yz, xz, yzxz\rangle$. Hieraus folgt, dass es zu jeder 3-dimensionalen Form φ über K Elemente $a, b, c \in K^*$ mit $\varphi \cong c\langle a, b, ab\rangle$ gibt. Dann ist φ ähnlich dem reinen Anteil der Pfisterform $\langle\langle a, b\rangle\rangle$.

4.1.2 Lemma. *Sei $\tau \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle$ eine 2-fache Pfisterform über K, und seien φ und ψ beide 3-dimensionale Pfisternachbarn von τ. Dann sind φ und ψ ähnlich.*

Beweis. Seien jeweils $\langle x\rangle$ und $\langle y\rangle$ die Komplemente von φ und ψ. Aus den Beobachtungen nach Definition 2.2.8 folgt $x\varphi \perp \langle 1\rangle \cong \tau$ und $y\psi \perp \langle 1\rangle \cong \tau$. Der Kürzungssatz von Witt 1.1.17 liefert $x\varphi \cong y\psi$. □

4.1.3 Satz. *Sei $\varphi \cong c\langle a, b, ab\rangle$ eine anisotrope Form über K, ψ anisotrop über K mit $\dim(\psi) = m \geq 2$ und $L = K(\psi)$.*

(1) Ist $m \leq 3$, so ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.

(2) Ist $m = 4$ und ψ ähnlich einer Pfisterform, so ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich der Pfisterform $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ ist.

(3) Ist $m \geq 4$ und ψ nicht ähnlich einer 2-fachen Pfisterform, so ist φ_L anisotrop.

[Hof92, Theorem 2.1.3]

Beweis. Es ist φ_L genau dann isotrop, wenn $\langle\langle a, b\rangle\rangle_L$ zerfällt. Aus Satz 2.2.4 folgt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn ψ ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ ist. Hieraus folgt sofort (2) und (3).

Ist ψ ähnlich einer Teilform von φ, so ist φ_L sicherlich isotrop. Sei andererseits φ_L isotrop und $\dim(\psi) = 2$. Aus Satz 1.2.5 folgt die Behauptung, da $K(\psi)_s$ und $K(\psi)$ äquivalent sind. Schließlich sei $\dim(\psi) = 3$ und φ_L isotrop. Da $\langle\langle a, b\rangle\rangle_L$ hyperbolisch ist, muss auch ψ ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ sein. Nach Lemma 4.1.2 sind φ und ψ ähnlich. □

Sei schließlich $\dim(\varphi) = 4$, $u \in D_K^*(\varphi)$ und $d \in d(\varphi)$. Dann gilt $d \in D_L(du\varphi)$, und es existiert eine Darstellung $\varphi \cong du\langle d, a, b, c\rangle$. Nach Lemma 1.1.16 können wir $c = ab$ annehmen.

4.1.4 Lemma. *Seien φ und ψ zwei 4-dimensionale Formen über K mit $d \in d(\varphi) = d(\psi)$, und sei $L = K(\sqrt{d})$. Dann sind φ und ψ genau dann ähnlich, wenn φ_L und ψ_L ähnlich sind.* *[Wad75, Theorem 8, Seite 357]*

Beweis. Sicherlich sind φ_L und ψ_L ähnlich, falls dies bereits für φ und ψ gilt. Ferner ist die Behauptung trivial, falls $d \in K^{*2}$ liegt, da in diesem Fall $L = K$ ist. Wir schließen diesen Fall im Folgenden aus.

Da es uns nur auf Ähnlichkeit ankommt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass sowohl φ als auch ψ die 1 darstellen. Es existieren also Formen φ' und ψ' mit $\varphi \cong \langle 1\rangle \perp \varphi'$ und $\psi \cong \langle 1\rangle \perp \psi'$.

Seien φ_L und ψ_L ähnlich. Wir nehmen zunächst an, φ sei isotrop. Dann sind auch φ_L und ψ_L isotrop. Nach Satz 1.2.5 existiert eine Darstellung $\psi \cong u\langle 1, -d\rangle \perp \langle x, y\rangle$ mit $u, x, y \in K^*$. Aus $d \in d(\psi)$ folgte $\langle x, y\rangle \cong \langle x, -x\rangle \cong \mathbb{H}$. Also ist auch ψ isotrop. Folglich existieren Zerlegungen $\varphi \cong \varphi'' \perp \mathbb{H}$ und $\psi \cong \psi'' \perp \mathbb{H}$. Da $d(\varphi'') = d(\psi'')$ gelten muss, folgt leicht die Ähnlichkeit von φ'' und ψ'' und somit auch die Ähnlichkeit von φ und ψ.

Seien nun φ und ψ anisotrop. Setze $\chi := \varphi' \perp -\psi'$. Da φ_L und ψ_L ähnlich sind und Diskriminante 1 haben, sind φ_L und ψ_L ähnlich ein und derselben Pfisterform. Sei $a_1 \in D_K^*(\varphi)$ und $a_2 \in D_K^*(\psi)$. Dann sind $a_1\varphi_L$ und $a_2\psi_L$ Pfisterformen und somit isometrisch. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass φ_L und ψ_L isometrische Pfisterformen sind. Dann ist χ_L hyperbolisch. Wir nehmen an, χ sei anisotrop. Aus Korollar 1.2.6 folgt $\det(\chi) = [-d]^{\square}$. Aber wegen $\det(\varphi') = \det(\psi') = [d]^{\square}$ folgt der Widerspruch $\det(\chi) = [-1]^{\square} \neq [-d]^{\square}$. Also muss χ isotrop sein. Folglich existiert ein $b \in D_K^*(\varphi') \cap D_K^*(\psi')$. Da $d(\varphi) = d(\psi)$ vorausgesetzt wurde, erhalten wir Darstellungen $\varphi \cong \langle 1, b, c_1, bc_1d\rangle$ und $\psi \cong \langle 1, b, c_2, bc_2d\rangle$ mit geeigneten $c_1, c_2 \in K^*$.

Wir müssen nun ein $w \in K^*$ finden, so dass $\langle 1, b\rangle \cong w\langle 1, b\rangle$ und $\langle c_1, bc_1d\rangle \cong w\langle c_2, bc_2d\rangle$ gilt. Betrachte dazu die Form $\rho = \langle 1, b, -c_1c_2, -bc_2c_2d\rangle$. Diese hat die Diskriminante $[d]^{\square}$. Da d in L ein Quadrat ist, gilt

$$c_1\rho_L \;\cong\; \langle c_1, bc_1, -c_2, -bc_2d\rangle_L \;\cong\; \langle c_1, bc_1d, -c_2, -bc_2d\rangle_L.$$

Also ist $c_1\rho_L$ eine Teilform der hyperbolischen Form $\varphi_L \perp -\psi_L$ mit Komplement $\langle 1, b, -1, -b\rangle$, welches ebenfalls hyperbolisch ist. Also ist auch ρ_L hyperbolisch. Ebenso wie für ψ folgt hier die Isotropie von ρ. Da φ und ψ anisotrop sind, gilt dies auch für $\langle 1, b\rangle$ und $\langle c_1c_2, bc_1c_2d\rangle$. Hieraus folgt die Existenz eines $w \in K^*$ mit $w \in D_K^*(\langle 1, b\rangle) \cap D_K^*(\langle c_1c_2, bc_1c_2d\rangle)$. Da $\langle 1, b\rangle$ eine Pfisterform ist, liegt $w \in G_K(\langle 1, b\rangle)$. Weiterhin stellt die Form $\langle c_1, bc_1d\rangle$ das Element wc_2 dar. Aus $[bd]^{\square} = \det(\langle c_1, bc_1d\rangle)$ folgt $\langle c_1, bc_1d\rangle \cong \langle wc_2, wbc_2d\rangle$. $\square$

4.1.5 Satz. *Sei $\varphi \cong c\langle d, a, b, ab\rangle$ eine anisotrope, 4-dimensionale Form über K, ψ eine anisotrope Form über K mit $\dim(\psi) = m \geq 2$ und $L = K(\psi)$.*

(1) Ist $m \leq 3$, so ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.

(2) Ist $m = 4$ und ψ ähnlich einer Pfisterform, so ist φ_L genau dann isotrop, wenn alle 3-dimensionalen Teilformen von ψ ähnlich einer Teilform von φ sind.

(3) Ist $m = 4$ und ψ nicht ähnlich einer Pfisterform, so ist φ_L genau dann isotrop, wenn φ und ψ ähnlich sind.

(4) Ist $m \geq 5$, so ist φ_L anisotrop.

[Hof92, Theorem 2.1.4]

Beweis. Zunächst behandeln wir den Fall $d \in K^{*2}$. In diesem Fall ist φ ähnlich einer Pfisterform, und φ_L ist genau dann isotrop, wenn φ_L hyperbolisch ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist. Hieraus folgen alle Behauptungen. Im Folgenden nehmen wir also $d \notin K^{*2}$ an.

(1): Ist $m = 2$, so folgt die Behauptung sofort aus Satz 1.2.5. Sei also $m = 3$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\psi \cong \langle u, v, uv\rangle$ mit $u, v \in K^*$ gilt. Sei $E = K(\sqrt{d})$. Dann ist φ_E ähnlich einer Pfisterform. Wäre φ_E isotrop, so auch hyperbolisch. Es würde eine 2-dimensionale Form χ mit $\varphi \cong \langle 1, -d\rangle \otimes \chi$ existieren und somit $d(\varphi) = 1 \neq [d]^{\square}$ gelten. Da dies ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist, muss φ_E anisotrop sein.

Sei $F = E(\langle\langle u, v\rangle\rangle_E)$. Da ψ ein Nachbar von $\langle\langle u, v\rangle\rangle$ ist, sind die Funktionenkörper F und $E(\psi_E)$ äquivalent über E. Wir nehmen an φ_L sei isotrop. Dann folgt, dass auch φ_F isotrop ist. Insbesondere muss $\langle\langle u, v\rangle\rangle_E$ anisotrop sein, da ansonsten F rein transzendent über E und somit φ_E bereits isotrop wäre, was wir bereits ausgeschlossen haben. Da φ_E eine Pfisterform ist, zerfällt φ_F. Nach Satz 2.2.4 ist $\langle\langle u, v\rangle\rangle_E$ eine Teilform von φ_E. Wir erhalten

$$\langle d, u, v, uv\rangle_E \;\cong\; \langle\langle u, v\rangle\rangle_E \;\cong\; \langle\langle a, b\rangle\rangle_E \;\cong\; \langle d, a, b, ab\rangle_E.$$

Aus Lemma 4.1.4 folgt die Ähnlichkeit von φ und $\langle d\rangle \perp \psi$.

(2): Ist ψ ähnlich einer Pfisterform, so sind die Funktionenkörper von ψ und jeder beliebigen 3-dimensionalen Teilform von ψ äquivalent. Wähle ein beliebige solche 3-dimensionale Teilform $\psi' \subset \psi$. Aus (1) folgt dann, dass φ_L genau dann isotrop ist, wenn ψ' eine Teilform von φ ist. Da ψ' beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung.

(3): Sei $d(\psi) \neq 1$ und $E = K(\sqrt{d})$. Wir nehmen an, φ_L sei isotrop. Wie im Beweis von (1) sehen wir, dass φ_E eine anisotrope Pfisterform ist. Da φ_L isotrop und $E(\psi_E)$ eine Körpererweiterung von L ist, zerfällt $\varphi \otimes E(\psi_E)$. Also sind φ_E und ψ_E ähnlich. Somit gilt $d(\psi_E) = 1$ und weiter $1 \neq d(\psi) = [d]^{\square}$. Aus Lemma 4.1.4 folgt, dass φ und ψ bereits ähnlich sind.

(4): Aus dem Anisotropiekriterium 3.2.3 folgt sofort die Anisotropie von φ_L. □

4.1.2 Albert-Formen

4.1.6 Definition. *Eine 6-dimensionale Form φ über K mit $d(\varphi) = 1$ und also $\varphi \Subset I^2(K)$ heißt* Albert-Form.

4.1.7 Lemma. *Sei $\psi \cong \langle a_1, \dots, a_m\rangle$ eine Form über K, $m \geq 3$, und $E = K(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten über K. Für $\chi := \langle a_1, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}X^2 + a_m\rangle$ über E gilt dann $K(\psi) \cong E(\chi)$.*

Beweis. Es ist

$$K(\psi) \;\cong\; K(X_2, \dots, X_m)\left(\sqrt{-\frac{1}{a_1}\,(a_2X_2^2 + \dots + a_mX_m^2)}\right)$$

und

$$E(\chi) \cong K(X, Y_2, \dots, Y_{m-1})\left(\sqrt{-\frac{1}{a_1}\left(a_2Y_2^2 + \dots + a_{m-2}Y_{m-2}^2 + a_{m-1}X^2Y_{m-1}^2 + a_mY_{m-1}^2\right)}\right).$$

Über die Zuordnungen $X_i \mapsto Y_i$ für $i = 2, \dots, m-2$, $X_{m-1} \mapsto XY_{m-1}$ und $X_m \mapsto Y_{m-1}$ erhält man den gewünschten Isomorphismus. □

4.1.8 Lemma. *Sei φ eine Albert-Form über K und $E = K(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten über K.*

(i) Sei $\rho \cong \langle 1, a_2, \ldots, a_m\rangle$ anisotrop über K mit $a_2, \ldots, a_m \in K^*$ und $3 \leq m \leq 6$.

(ii) Weiterhin sei $\varphi_E \cong f\psi \perp \chi$ mit quadratfreiem $f \in K[X] \setminus \{0\}$, $\deg(f) > 0$,

(iii) $\psi \cong \langle 1, a_2, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}X^2 + a_m\rangle$, $a_{m-1}X^2 + a_m$ irreduzibel,

(iv) $\chi \cong \langle h_s, \ldots, h_4\rangle$, $h_s, \ldots, h_4 \in K[X] \setminus \{0\}$ quadratfrei und $s = m - 2$.

(v) Für $m = 4$ gelte zusätzlich $d(\rho) \neq 1$.

Dann existiert ein $g \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $\deg(g) < \deg(f)$ und $\varphi_E \cong g\psi \perp \langle \ldots \rangle$.

[Hof92, Beweis von Theorem 2.2.1]

Beweis. Sei $p \in K[X]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom mit $\deg(p) > 0$, das f teilt. Zunächst nehmen wir an, p teile $a_{m-1}X^2 + a_m$ nicht. Aus $-\det(\varphi) = d(\varphi) = 1$, können wir $\det(f\psi) = -\det(\chi)$ folgern. Da f quadratfrei ist und wir davon ausgehen, dass $a_{m-1}X^2 + a_m$ von p nicht geteilt wird, folgt $\det(f\psi) = [xp^{\varepsilon}]^{\square} = -\det(\chi)$ mit einem geeigneten $x \in E^*$ und $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Dabei ist x quadratfrei mit $p \nmid x$, und es gilt genau dann $\varepsilon = 0$, wenn $\dim(\psi)$ gerade ist. Da auch die h_i als quadratfrei vorausgesetzt wurden, können wir ohne Einschränkung die folgenden Fälle unterscheiden:

1. $s = 1$ und $p \nmid h_i$ für $i = 1, \ldots, 4$.
2. $s \leq 3$, $p \nmid h_3, h_4$ und $p | h_i$ für $i = s, \ldots, 2$.
3. $p | h_i$ für $i = s, \ldots, 4$.

Bevor wir uns den Beweisen für die Fälle 1-3 zuwenden, wollen wir noch den Fall betrachten, dass $a_{m-1}X^2 + a_m$ von p geteilt wird. Im Verlauf des Beweises wird deutlich werden, dass auch in diesem Fall die Beweise für den 2. und 3. Fall gültig sind, da die Voraussetzung $p \nmid (a_{m-1}X^2 + a_m)$ nicht benötigt wird. Da $a_{m-1}X^2 + a_m$ nach Voraussetzung irreduzibel ist, existiert ein $a \in K^*$ mit $ap = a_{m-1}X^2 + a_m$.

Nachfolgend verwenden wir die Bezeichnungen aus Unterabschnitt 1.4.2. Da φ_E über K definiert ist, gilt $\partial_2^{(p)}(\varphi_E) \sim 0$.

Ist $m = 3$, so ist $\psi = \langle 1, a_2X^2 + a_3\rangle$ und es gilt $ap \in D_E^*(\psi) = G_E(\psi)$. Setze $g = \frac{f}{ap}$. Dann ist $f\psi \cong g\psi$ und $\deg(g) < \deg(f)$.

Sei $m = 4$. Aus der Einschränkung $d(\rho) \neq 1$, folgt die Existenz einer Darstellung $\rho \cong \langle 1, -c_2, -c_3, c_2c_3d\rangle$ mit $c_2, c_3, d \in K^*$ und $d \notin K^{*2}$. Somit ist $ap = -c_3X^2 + c_2c_3d$. Da f quadratfrei ist, existiert ein $q \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $p \nmid q$ und $f = q(X^2 - c_2d)$. Wir erhalten

$$\varphi_E \;\cong\; \big(q(X^2 - c_2d)\langle 1, -c_2\rangle\big) \perp \langle -c_3q, h_2, h_3, h_4\rangle.$$

Wieder muss

$$\det(f\langle 1, -c_2\rangle) \;=\; [-c_2]_E^{\square} \;=\; -\det(\langle -c_3q, h_2, h_3, h_4\rangle)$$

gelten. Es folgt, dass entweder genau 2 oder keines der h_i von $X^2 - c_2d$ geteilt werden. Ist keines der h_i durch $X^2 - c_2d$ teilbar, so gilt

$$0 \;\sim\; \partial_2^{(X^2 - c_2d)}(\varphi_E) \;\sim\; \overline{q}\langle 1, -\overline{c_2}\rangle.$$

Hieraus folgt, dass c_2 in

$$\kappa_{X^2-c_2d} \;\cong\; K[X]/(X^2-c_2d) \;\cong\; K\Big(\sqrt{c_2d}\Big)$$

ein Quadrat ist. Es gilt $c_2 \in K^* \cap (K(\sqrt{c_2d})^*)^2 = K^{*2} \cup c_2dK^{*2}$. Entsprechend muss entweder $d \in K^{*2}$ liegen, was wir ausgeschlossen hatten, oder $c_2 \in K^{*2}$ gelten. Letzteres ist ebenfalls nicht möglich, da ansonsten $\rho \cong \langle 1,-c_2,-c_3,c_2c_3d\rangle$ isotrop wäre. Also können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass genau h_3 und h_4 von p geteilt werden. Wie sich noch herausstellen wird, reduziert sich dieser Fall somit auf den 2. Fall.

Sei $5 \leq m \leq 6$. Setze $c_i := -a_i$ für $i = 2,\ldots,m-1$. Weiterhin sei $e \in d(\rho)$. Dann ist

$$\rho \;\cong\; \langle 1,-c_2,\ldots,-c_{m-1},-c_1\ldots c_{m-1}e\rangle.$$

Setze $d := -c_2\ldots c_{m-2}e$. Da die Form $\rho \cong \langle 1,-c_2,\ldots,-c_{m-1},c_{m-1}d\rangle$ anisotrop und $ap = -c_{m-1}X^2 + c_{m-1}d$ ist, muss $d \notin K^{*2}$ gelten und also X^2-d irreduzibel sein. Weiterhin existiert ein $q \in K[X]\setminus\{0\}$ mit $p \nmid q$ und $f = q(X^2-d)$, da f quadratfrei ist. Wir erhalten

$$\varphi_E \;\cong\; \big(q(X^2-d)\langle 1,-c_2,\cdots,-c_{m-2}\rangle\big) \perp \langle -c_{m-1}q,h_{m-2},\ldots,h_4\rangle.$$

Ist $m=5$, so sehen wir mit Hilfe der Determinante von φ_E, dass entweder h_3 oder h_4 von p geteilt wird. Hier können wir erneut auf den 2. Fall zurückgreifen. Für $m=6$, sehen wir, dass h_4 nicht von p geteilt wird. Auch hier greift der 2. Fall.

1. Fall: Es ist $m=3$. Da f von p geteilt wird, gilt in diesem Fall

$$0 \;\sim\; \partial_2^{(p)}(\varphi_E) \;\sim\; \partial_2^{(p)}(\langle 1,a_2X^2+a_3\rangle_E).$$

Also ist $-(a_2X^2+a_3)$ ein Quadrat in $\kappa_p \cong K[X]/(p)$. Folglich existieren Polynome $q,q' \in K[X]$ mit $-(a_2X^2+a_3) = q^2 - q'p$. Ohne Einschränkung können wir q durch ein Element $b \in q+(p)$ und $\deg(b) < \deg(p)$ ersetzen. Ist p linear, so hat p genau eine Nullstelle $u \in K$. Es gilt $-(a_2u^2+a_3) = q(u)^2$, und somit ist $(q(u),u,1)^t$ eine Nullstelle von $\rho = \langle 1,a_2,a_3\rangle_E$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (i), weshalb $\deg(p) \geq 2$ gelten muss. Aus

$$\deg(q'p) \;=\; \deg(q^2+a_2X^2+a_3) \;\leq\; 2\deg(p)-2$$

folgt $\deg(q') \leq \deg(p)-2$. Außerdem gilt $\psi((q,1)^t) = q'p$ und somit $q'p \in G_E(\psi_E)$. Setze nun $g = \frac{q'f}{p}$. Dann gilt

$$g\psi_E \;\cong\; q'pg\psi_E \;\cong\; f\psi_E$$

und $\deg(g) < \deg(f)$, da $\deg(q') < \deg(p)$ gilt.

2. Fall: Da $p|f$ und $p|h_i$ mit $i = s,\ldots,2$ vorausgesetzt wurde, existiert eine Form σ über E mit $\varphi_E \cong p\sigma\perp\langle h_3,h_4\rangle$. Dabei sind die Diagonaleinträge von $\sigma = \langle b_1,\ldots,b_4\rangle$ Elemente von $K[X]\setminus\{0\}$ mit $p \nmid b_i$ für $i = 1,\ldots,4$, da sowohl f als auch die h_i als quadratfrei vorausgesetzt wurden. Entsprechend gilt

$$0 \;\sim\; \partial_2^{(p)}(\varphi_E) \;\sim\; \overline{\sigma} \;:=\; \langle \overline{b_1},\ldots,\overline{b_4}\rangle$$

und also $d(\overline{\sigma}) = 1$. Da die Diskriminante auf $I(K)$ ein Homomorphismus ist, gilt $1 = d(\varphi_E) = d(\sigma)d(\langle h_3,h_4\rangle)$ und somit $d(\langle \overline{h_3},\overline{h_4}\rangle) = 1$. Es folgt $\partial_1^{(p)}(\varphi_E) \sim \langle \overline{h_3},\overline{h_4}\rangle \sim 0$. Den Rest der Behauptung zeigen wir zusammen mit dem 3. Fall.

3. Fall: Im diesem Fall gilt sicherlich $\partial_1^{(p)}(\varphi_E) \sim 0$. Also können wir fortan den 2. und 3. Fall gemeinsam behandeln. Aus Theorem 1.4.9 folgt $p \in G_E(\varphi_E)$. Setzen wir $g = \frac{f}{p}$, so erhalten wir

$$\varphi_E \;\cong\; p\varphi_E \;\cong\; g\psi \perp p\chi$$

mit $\deg(g) < \deg(f)$. Somit ist die Behauptung für alle Fälle bewiesen. $\square$

4.1.9 Lemma. *Seien φ, ψ und χ Formen über K. Sind $\varphi \otimes K(\psi)$ und $\psi \otimes K(\chi)$ isotrop, so ist $\varphi \otimes K(\chi)$ isotrop. Ist insbesondere $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop und $\chi \subset \psi$ mit $\dim(\chi) \geq 2$, so ist $\varphi \otimes K(\chi)$ isotrop.*

Beweis. Ist $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop, so existiert eine Stelle $\lambda : K(\varphi) \to K(\psi)^\infty$. Analog existiert eine Stelle $\mu : K(\psi) \to K(\chi)^\infty$ und somit die Stelle $\mu \circ \lambda : K(\varphi) \to K(\chi)^\infty$. Nach Proposition 2.1.28 ist $\varphi \otimes K(\chi)$ isotrop. $\square$

4.1.10 Theorem. *Sei φ eine anisotrope Albert-Form über K und ψ eine anisotrop Form über K mit $\dim(\psi) \geq 2$, wobei ψ nicht ähnlich einer 2-fachen Pfisterform sei. Setze $L = K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.*

[Hof92, Theorem 2.2.1]

Beweis. Sicherlich ist φ_L isotrop, falls ψ ähnlich einer Teilform von φ ist. Ist $\dim(\psi) = 2$, so folgt die umgekehrte Richtung sofort aus Satz 1.2.5. Sei also $\dim(\psi) = m \geq 3$. Da es uns nur auf Ähnlichkeit ankommt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\psi \cong \langle 1, a_2, \ldots, a_m\rangle$ gilt. Sei $E = K(X)$ und $\chi := \langle 1, a_2, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}X^2 + a_m\rangle$ über E. Das Polynom $a_{m-1}X^2 + a_m$ ist irreduzibel, da ansonsten $-\frac{a_m}{a_{m-1}}$ ein Quadrat in K^{*2} und somit ψ isotrop wäre. Nach Lemma 4.1.7 gilt $L \cong E(\chi)$.

Sei zunächst $3 \leq m \leq 6$. Wir nehmen an, die Behauptung sei für $m-1$ bereits gezeigt. Sicher ist φ_E anisotrop. Sei φ_L isotrop, dann ist auch $\varphi \otimes E(\chi)$ isotrop. Da $\dim(\chi) = m-1$ gilt, folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Existenz einer Zerlegung

$$\varphi_E \;\cong\; f\chi \perp \langle h_s, \ldots, h_4\rangle$$

mit $s = m-2$ und $f, h_s, \ldots, h_4 \in K[X]$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass f und die h_i quadratfrei sind. Wir müssen uns den Fall $m = 5$ einmal genauer anschauen. Um hier die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, muss $d(\chi) \neq 1$ gelten. Tatsächlich gilt $d(\chi) = [a_2a_3a_4(X^2 + \frac{a_5}{a_4})]^\square \neq 1$, da $X^2 + \frac{a_5}{a_4}$ wie bereits festgestellt kein Quadrat in E ist.

Durch unter Umständen wiederholtes Anwenden von Lemma 4.1.8 können wir den Grad von f auf 0 reduzieren. Das heißt, wir können $f = x$ mit $x \in K^*$ annehmen. Also hat die Form $x\varphi_E \perp -\langle 1, a_2, \ldots, a_{m-2}\rangle_E$ den Wittindex $m-2$ über E und somit auch über K, da E/K rein transzendent ist. Folglich existiert eine Form φ' über K mit

$$x\varphi \;\cong\; \langle 1, a_2, \ldots, a_{m-2}\rangle \perp \varphi'.$$

Aus $\langle 1, a_2, \ldots, a_{m-2}\rangle_E \perp \langle a_{m-1}X^2 + a_m\rangle = \chi$ und $\chi \subset \varphi_E$ folgt $a_{m-1}X^2 + a_m \in D_E(\varphi'_E)$. Nach Theorem 1.2.4 gilt $\langle a_{m-1}, a_m\rangle \subset \varphi'$ und also $\psi \subset x\varphi$ über K.

Abschließend sei $m \geq 7$. Nach Lemma 4.1.9 reicht es den Fall $m = 7$ zu betrachten. Wir wollen zeigen, dass φ_L anisotrop ist. Sei $\psi \cong \langle a_1, \ldots, a_7\rangle$ anisotrop. Wir nehmen an φ_L sei isotrop. Am Anfang dieses Beweises haben wir gezeigt, dass $a_6X^2 + a_7$ irreduzibel ist. Die

6-dimensionale Form φ_E wird isotrop über $E(\chi) \cong L$, wobei $\chi = \langle a_1, \ldots, a_5, a_6X^2 + a_7\rangle$ ist. Aus dem Beweis für $m = 6$ folgt $\varphi_E \cong f\langle a_1, \ldots, a_5, a_6X^2 + a_7\rangle$ mit $f \in K[X]$. Es folgt $\det(\varphi_E) = [-1]^\square = \left[a_1 \ldots a_5(a_6X^2 + a_7)\right]^\square$, was unmöglich ist, da $a_6X^2 + a_7$ irreduzibel ist. Also ist φ_L anisotrop. $\square$

Den Fall, dass ψ ähnlich einer 2-fachen Pfisterform ist, hatten wir in dem soeben bewiesenen Theorem ausgeschlossen. Tatsächlich ist dieser Fall recht einfach. Sei also φ eine anisotrope Albert-Form über K, $\psi \Subset GP_2(K)$ anisotrop, $L = K(\psi)$ und φ_L isotrop. Nach Lemma 4.1.2 sind alle 3-dimensionalen Teilformen von ψ ähnlich. Wähle eine beliebige solche Teilform ψ'. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn $\varphi \otimes K(\psi')$ isotrop ist. Aus dem vorherigen Theorem folgt, dass ψ' ähnlich einer Teilform von φ ist.

4.1.11 Satz. *Seien φ und ψ anisotrope Formen über K, φ eine Albert-Form und $\psi \Subset GP_2(K)$. Dann ist $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop, wenn jede 3-dimensionale Teilform von ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.*

4.1.3 Formen der Dimension 5

In diesem Unterabschnitt betrachten wir anisotrope, 5-dimensionale Formen über K. Zu einer solchen Form φ wollen wir alle anisotropen Formen ψ über K bestimmen, für die $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop ist. Dazu betrachten wir die möglichen Dimensionen von ψ einzeln.

Sei τ eine k-fache Pfisterform über K mit $k \geq 2$. Dann gilt nach Satz 1.3.21 und Lemma 2.2.13

$$c(\tau) \;=\; c(\tau_p) \cdot c(\langle 1\rangle)\left[\left(\frac{-1,1}{K}\right)\right] \;=\; c(\tau_p).$$

Für den reinen Anteil τ_p einer k-fachen Pfisterform τ mit $k \geq 2$ gilt also immer $c(\tau_p) = c(\tau)$.

4.1.12 Lemma. *Sei φ eine anisotrope, 5-dimensionale Form über K, welche kein Pfister-nachbar ist, ψ eine anisotrope Form über K mit $\dim(\psi) \geq 2$ und $\psi \notin GP_2(K)$, $d \in d(\varphi)$ und $L = K(\psi)$. Dann ist $\chi := \varphi\perp\langle -d\rangle$ anisotrop. Ist φ_L isotrop, so ist ψ ähnlich einer Teilform von χ.*

Beweis. Die Form φ ist nach Proposition 3.2.31 genau dann ein Pfisternachbar, wenn $d \in D_K(\varphi)$ gilt. Also ist die Form $\chi = \varphi\perp\langle -d\rangle$ anisotrop, und es gilt $d(\chi) = 1$. Ist φ_L isotrop, so auch χ_L. Nach Theorem 4.1.10 ist ψ ähnlich einer Teilform von χ. $\square$

4.1.13 Proposition. *Sei φ eine anisotrope, 5-dimensionale Form über K, welche kein Pfisternachbar ist. Ferner sei ψ eine 3-dimensionale anisotrope Form über K und $L = K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.*

[Hof95a, Main Theorem, Seite 218]

Beweis. Ist ψ ähnlich einer Teilform von φ, so folgt sofort die Isotropie von φ_L. Sei umgekehrt φ_L isotrop und $d \in d(\varphi)$. Nach Lemma 4.1.12 ist $\chi = \varphi\perp\langle -d\rangle$ anisotrop und ψ ähnlich einer Teilform von χ. Ohne Einschränkung können wir $\psi \subset \chi$ annehmen. Es ist $\psi \cong \langle -a, -b, ab\rangle$ mit $a, b \in K^*$, und es existieren $u, v \in K^*$ mit $\chi \cong \langle -a, -b, ab, u, v, -uv\rangle$, da $d(\chi) = 1$ gilt. Für die Form $\eta := d\langle -u, -v, uv\rangle$ folgt dann $d(\varphi\perp\eta) = 1$.

Es ist $c(\psi) = c(\langle\langle -a, -b\rangle\rangle) = [\left(\frac{a,b}{K}\right)] \neq 1$, da ψ anisotrop ist, und

$$c(\langle u, v, -uv\rangle) \;=\; c(\langle u, v\rangle)c(\langle -uv\rangle)\left[\left(\frac{uv, -uv}{K}\right)\right] \;=\; \left[\left(\frac{u, v}{K}\right)\right]$$

nach Satz 1.3.21 (2). Weiterhin folgt aus Satz 1.3.21 (1)

$$c(\chi) \;=\; \left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{u, v}{K}\right)\right].$$

Schließlich gilt

$$c(\chi) \;=\; c(\varphi) \cdot c(\langle -d\rangle) \cdot \left[\left(\frac{d, -d}{K}\right)\right] \;=\; c(\varphi),$$

und analog folgt mit Hilfe von Satz 1.3.22 (1)

$$c(\varphi \perp \eta) \;=\; c(\varphi) \cdot \left[\left(\frac{u, v}{K}\right)\right] \;=\; \left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right] \;\neq\; 1.$$

Insbesondere erhalten wir $c(\varphi_L \perp \eta_L) = [\left(\frac{a,b}{L}\right)] = 1$ und demnach $\{\varphi_L \perp \eta_L\} \in I^3(L)$, da $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle_L \sim 0$ gilt. Da φ_L isotrop ist, folgt $\dim((\varphi_L \perp \eta_L)_{an}) < 8$. Der Arason-Pfister-Hauptsatz 2.2.14 besagt nun $\varphi_L \perp \eta_L \sim 0$. Es gilt $W(L/K) = W(K(\langle\langle -a, -b\rangle\rangle)/K)$ nach Satz 3.1.12, und nach Satz 2.2.5 existiert eine Form ρ über K mit $\dim(\rho) \in \{1, 2\}$ und $\varphi \perp \eta \sim \rho \otimes \langle\langle -a, -b\rangle\rangle$. Es ist

$$c(\varphi \perp \tau) \;=\; \left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right] \;=\; c(\rho \otimes \langle\langle a, b\rangle\rangle) \;\neq\; 1,$$

und somit kann $\varphi \perp \tau$ nach Proposition 3.2.30 nicht ähnlich einer 3-fachen Pfisterform sein. Deshalb muss $\dim(\rho) = 1$ gelten. Dies bedeutet $\varphi \perp \eta \sim s\langle\langle -a, -b\rangle\rangle$ mit geeignetem $s \in K^*$. Da φ und η anisotrop sind, existiert eine 2-dimensionale Form α über K und eine Zerlegung $\varphi \perp \eta \cong \varphi' \perp \alpha \perp -\alpha \perp \langle r\rangle$ mit $\varphi' \subset \varphi$, $r \in D_K^*(\eta)$ und $\varphi' \perp \langle r\rangle \cong s\langle\langle -a, -b\rangle\rangle$. Nach Lemma 4.1.2 sind φ' und ψ ähnlich. □

4.1.14 Lemma. *Sei $\alpha \cong \langle d, -a, -b, ab\rangle$ eine anisotrope Form über K mit $d \notin K^{*2}$, $L = K(\alpha)$ und β eine 3-fache Pfisterform über K. Dann gilt genau dann $\beta \Subset W(L/K)$, wenn ein $x \in D_K^*(\langle 1, -d\rangle)$ mit $\beta \cong \langle\langle -a, -b, -x\rangle\rangle$ existiert.*

[Hof95a, Lemma 3.1, Seite 220]

Beweis. Sei $\beta \cong \langle\langle -a, -b, -x\rangle\rangle$ mit $x \in D(\langle 1, -d\rangle)$. Dann ist die Pfisterform $\langle 1, -d, -x, xd\rangle$ hyperbolisch. Also gilt $\langle 1, -x\rangle \cong \langle d, -xd\rangle$ und deshalb

$$\begin{aligned} \beta &\cong \langle 1, -x\rangle \perp \langle -a, -b, ab\rangle \perp -x\langle -a, -b, ab\rangle \\ &\cong \langle d, -xd\rangle \perp \langle -a, -b, ab\rangle \perp -x\langle -a, -b, ab\rangle. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt $\alpha \cong \langle d, -a, -b, ab\rangle \subset \beta$. Folglich ist β_L isotrop und somit hyperbolisch.

Sei umgekehrt $\{\beta\} \in W(L/K)$. Ist β isotrop und somit hyperbolisch, so können wir $x = 1 \in D(\langle 1, -d\rangle)$ wählen. Dann gilt sicherlich $\langle\langle -a, -b, -1\rangle\rangle \cong \beta \sim 0$. Wir nehmen an, β sei anisotrop. Da β_L zerfällt, existiert ein $r \in K^*$ und eine Form η über K, so dass $\beta \cong r\alpha \perp \eta$ gilt. Die Form α_L ist isotrop und β_L hyperbolisch. Also muss auch η_L isotrop sein. Nach

Satz 4.1.5 (3) existiert ein $s \in K^*$ mit $\eta \cong s\alpha$. Das heißt, es gilt $\beta \cong \langle r, s\rangle \otimes \langle d, -a, -b, ab\rangle$. Die Form $\langle r, s\rangle \otimes \langle -a, -b, ab\rangle$ ist ein Pfisternachbar der Pfisterform β, und es gilt weiterhin $r(\langle r, s\rangle \otimes \langle -a, -b, ab\rangle) \subset \langle\langle -a, -b, rs\rangle\rangle$. Da die zu einem Pfisternachbar gehörige Pfisterform eindeutig bestimmt ist, folgt $\beta \cong \langle\langle -a, -b, rs\rangle\rangle$.

Aus $-a, -ra \in D_K(\beta) = G_K(\beta)$ und der Tatsache, dass $G_K(\beta)$ eine multiplikative Gruppe ist, folgt $r \in G_K(\beta)$. Wir erhalten

$$\beta \;\cong\; \langle r, s\rangle \otimes \langle d, -a, -b, ab\rangle \;\cong\; r\langle\langle -a, -b, rs\rangle\rangle \;\cong\; \langle r, s\rangle \otimes \langle 1, -a, -b, ab\rangle$$

und somit $\langle rd, sd\rangle \cong \langle r, s\rangle$. Dies impliziert, dass die Form $\langle 1, -d, rs, -rsd\rangle$ hyperbolisch ist. Da $\langle 1, -d\rangle$ laut Voraussetzung anisotrop ist, liegt $-rs \in D_K(\langle 1, -d\rangle)$. Setzen wir $x = -rs$, so folgt die Behauptung. □

4.1.15 Bemerkung. Am Ende des Unterabschnitts 3.1.3 haben wir den Wittkern einer anisotropen, 4-dimensionalen quadratischen Form φ über K mit $d(\varphi) \neq 1$ betrachtet. Wir haben bewiesen, dass der Wittkern von φ ein strenges 3-Pfister-Ideal ist (siehe Korollar 3.1.17). Allerdings konnten wir noch nicht sagen, von welchen 3-fachen Pfisterformen über K der Wittkern $W(K(\varphi)/K)$ erzeugt wird. Das vorherige Lemma 4.1.14 löst dieses Problem: Zu φ existiert eine Darstellung $\varphi \cong c\langle d, a, b, ab\rangle$ mit $a, b, c \in K^*$ und $d \in d(\varphi)$. Lemma 4.1.14 besagt nun, dass $W(K(\varphi)/K)$ von allen Pfisterformen $\langle\langle a, b, -x\rangle\rangle$ mit $x \in D_K^*(\langle 1, -d\rangle)$ erzeugt wird. △

4.1.16 Lemma. *Seien $a, b, d, e, r, s, t \in K^*$ so, dass*

$$\langle -a, -b, ab, d, e, -ed\rangle \;\cong\; t\langle -a, -b, ab, r, s, -rs\rangle$$

anisotrop ist. Dann existieren $u, v, w \in K^*$ mit $\langle d, e\rangle \cong \langle u, v\rangle$ und $\langle r, s\rangle \cong \langle u, w\rangle$, und es liegt $vw \in G_K(\langle 1, -u\rangle)$.

Beweis. Nach Satz 1.3.22 (1) gilt

$$c(\langle -a, -b, ab\rangle) \;=\; c(t\langle -a, -b, ab\rangle) \;=\; \left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right].$$

Es folgt

$$\left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right] \cdot c(\langle d, e, -ed\rangle) \cdot \left[\left(\frac{-1, 1}{K}\right)\right] \;=\; \left[\left(\frac{a, b}{K}\right)\right] \cdot c(t\langle r, s, -rs\rangle) \cdot \left[\left(\frac{-t, t}{K}\right)\right]$$

und somit $[(\frac{d,e}{K})] = [(\frac{r,s}{K})]$. Hieraus erhalten wir mit Hilfe von Proposition 1.3.28

$$\langle\langle -d, -e\rangle\rangle \;\cong\; \langle\langle -r, -s\rangle\rangle. \tag{4.1}$$

Durch Umstellen sehen wir, dass $\langle -d, -e\rangle \perp \langle r, s\rangle \cong \langle 1, -1, -de, rs\rangle$ isotrop ist. Nach Voraussetzung ist $\langle d, e\rangle$ anisotrop. Somit ist nach (4.1) auch $\langle r, s\rangle$ anisotrop. Es folgt die Existenz eines $u \in D_K(\langle r, s\rangle) = D_K(\langle d, e\rangle)$, so dass

$$\langle d, e\rangle \cong \langle u, v\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle r, s\rangle \cong \langle u, w\rangle$$

mit geeigneten $v, w \in K^*$ gilt. Aus

$$\langle\langle -u, -v\rangle\rangle \;\cong\; \langle\langle -d, -e\rangle\rangle \underset{(4.1)}{\cong} \langle\langle -r, -s\rangle\rangle \;\cong\; \langle\langle -u, -w\rangle\rangle$$

folgt $\langle u,v,-uv\rangle \cong \langle u,w,-vw\rangle$. Durch Addition mit $-\langle u,w,-uw\rangle$ erhalten wir die zur letzten Behauptung äquivalente Aussage

$$\langle 1,-u,-vw,uvw\rangle \;\cong\; \langle\langle -u,-vw\rangle\rangle \;\sim\; 0.$$

□

4.1.17 Proposition. *Es seien φ und ψ anisotrope Formen über K mit $\dim(\varphi) = 5$ und $\dim(\psi) = 4$, so dass φ und ψ keine Pfisternachbarn sind. Setze $L := K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.*

[Hof95a, Main Theorem, Seite 218]

Beweis. Ist ψ ähnlich einer Teilform von φ, so ist φ_L sicherlich isotrop. Für die umgekehrte Richtung, gehen wir davon aus, dass φ_L isotrop ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $a,b,d \in K^*$ mit $d \notin {K^*}^2$ und $\psi \cong \langle d,-a,-b,ab\rangle$ existieren.

Da φ_L und $\psi \otimes K(\langle -a,-b,ab\rangle)$ isotrop sind, folgt aus Lemma 4.1.9 die Isotropie von $\varphi \otimes K(\langle -a,-b,ab\rangle)$. Nach Theorem 4.1.13 ist $\langle -a,-b,ab\rangle$ ähnlich einer Teilform von φ. Es kommt uns nur auf Ähnlichkeit an, weshalb wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $r,s \in K^*$ mit

$$\varphi \;\cong\; \langle -a,-b,ab,r,s\rangle$$

existieren. Nach Lemma 4.1.12 ist $\chi := \varphi \perp \langle -rs\rangle$ anisotrop mit $d(\chi) = 1$, und es gilt $\psi \subset t\chi$ mit einem $t \in K^*$.

Wegen $[d]^{\square} = d(\psi)$ und $d(\chi) = 1$ gilt, existiert ein $e \in K^*$ mit

$$\psi \perp \langle e,-ed\rangle \;\cong\; \langle -a,-b,ab,d,e,-ed\rangle \;\cong\; t\langle -a,-b,ab,r,s,-rs\rangle.$$

Aus Lemma 4.1.16 folgt

$$\langle d,e\rangle \;\cong\; \langle u,v\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle r,s\rangle \cong \langle u,w\rangle \tag{4.2}$$

mit geeigneten $v,w \in K^*$ und weiter

$$\langle 1,-u,-vw,uvw\rangle \;\cong\; \langle\langle -u,-vw\rangle\rangle \;\sim\; 0. \tag{4.3}$$

Für $\rho := \langle -a,-b,ab,d,e\rangle$ gilt

$$\begin{aligned}
\rho \perp -vw\varphi \;&\cong\; \langle -a,-b,ab,u,v\rangle \perp -vw\langle -a,-b,ab,u,w\rangle \\
&\cong\; (\langle 1,-vw\rangle \otimes \langle -a,-b,ab\rangle) \perp \langle u,v,-uvw,-v\rangle \\
&\cong\; (\langle 1,-vw\rangle \otimes \langle -a,-b,ab\rangle) \perp \langle 1,-vw\rangle \perp \mathbb{H} \qquad\qquad \text{nach (4.3)} \\
&\cong\; \langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle \perp \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

Aus $\psi \subset \rho$ folgt, dass ρ_L isotrop ist. Laut Annahme ist φ_L isotrop. Entsprechend gilt

$$\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle_L \perp \mathbb{H} \;\cong\; \rho_L \perp -vw\varphi_L \;\cong\; \mathbb{H} \perp \mathbb{H} \perp \ldots,$$

weshalb $\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle_L$ isotrop und somit hyperbolisch sein muss. Dies bedeutet insbesondere $\{\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle\} \in W(L/K)$. Nach Lemma 4.1.14 existiert ein

$$x \;\in\; D_K(\langle 1,-d\rangle) \;=\; G_K(\langle 1,-d\rangle) \;=\; G_K(\langle d,-1\rangle), \tag{4.4}$$

so dass

$$\langle\langle -a, -b, -vw\rangle\rangle \;\cong\; \langle\langle -a, -b, -x\rangle\rangle$$

gilt. Es folgt $-vw\langle\langle -a, -b\rangle\rangle \cong -x\langle\langle -a, -b\rangle\rangle$ und somit $xvw \in G_K(\langle\langle -a, -b\rangle\rangle)$. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}\perp xvw\varphi &\cong xvw(\langle 1, -1\rangle\perp\langle -a, -b, ab, u, w\rangle) \\
&\cong xvw\langle 1, -a, -b, ab\rangle\perp xvw\langle u, w, -1\rangle \\
&\cong \langle 1, -a, -b, ab\rangle\perp x(\langle vwu, -vw\rangle\perp\langle v\rangle) \\
&\cong \langle 1, -a, -b, ab\rangle\perp x\langle u, -1, v\rangle && \text{nach (4.3)} \\
&\cong \langle 1, -a, -b, ab\rangle\perp x\langle d, -1, e\rangle && \text{nach (4.2)} \\
&\cong \langle 1, -a, -b, ab\rangle\perp\langle d, -1, xe\rangle && \text{nach (4.4)} \\
&\cong \mathbb{H}\perp\langle -a, -b, ab, d, xe\rangle.
\end{aligned}$$

Aus dem Kürzungssatz von Witt folgt $\psi \subset \langle -a, -b, ab, d, xe\rangle \cong xvw\varphi$. □

4.1.18 Proposition. *Seien φ und ψ anisotrope Formen über K mit $\dim(\varphi) = \dim(\psi) = 5$. Weiterhin sei φ kein Pfisternachbar und $L = K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ und φ ähnlich sind.*

[Hof95a, Main Theorem, Seite 218]

Beweis. Gehen wir davon aus, ψ und φ seien ähnlich, so folgt trivialerweise die Isotropie von φ_L. Sei umgekehrt φ_L isotrop. Wähle eine 3-dimensionale Form ψ' mit $d(\psi') = -1$, die ähnlich einer Teilform von ψ ist. Wir können ohne Einschränkung $\psi' \subset \psi$ annehmen. Es existieren $a, b \in K^*$ mit $\psi' \cong \langle -a, -b, ab\rangle$. Da φ_L isotrop ist und $\psi' \subset \psi$ gilt, folgt aus Lemma 4.1.9, dass auch $\varphi \otimes K(\psi')$ isotrop ist. Nach Proposition 4.1.13 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\varphi \;\cong\; \langle -a, -b, ab, r, s\rangle$$

mit geeigneten $r, s \in K^*$ gilt.

Die Form $\chi := \varphi\perp\langle -rs\rangle \Subset I^2(K)$ ist anisotrop und χ_L isotrop. Nach Lemma 4.1.12 existiert ein $t \in K^*$ mit $\psi \subset t\chi$. Da $\psi' \subset \psi$ und $d(t\chi) = 1$ gilt, folgt aus einem Determinantenvergleich die Existenz zweier Elemente $d, e \in K^*$ mit

$$\psi\perp\langle -ed\rangle \;\cong\; \langle -a, -b, ab, d, e, -ed\rangle \;\cong\; t\langle -a, -b, ab, r, s, -rs\rangle \;\cong\; t(\varphi\perp\langle -rs\rangle).$$

Nach Lemma 4.1.16 gibt es $u, v, w \in K^*$ mit $\langle d, e\rangle \cong \langle u, v\rangle$ und $\langle r, s\rangle \cong \langle u, w\rangle$. Insbesondere gilt

$$\psi \;\cong\; \langle -a, -b, ab, u, v\rangle \qquad \text{und} \qquad \varphi \;\cong\; \langle -a, -b, ab, u, w\rangle,$$

wobei die Formen $\psi\perp\langle -uv\rangle$ und $\varphi\perp\langle -uw\rangle$ ähnlich sind und die Äquivalenzklassen beider Formen in $I^2(K)$ liegen. Wäre ψ ein Pfisternachbar, so würde ψ nach Proposition 3.2.31 die Diskriminante $d(\psi) = uv$ darstellen. Dies aber würde bedeuten, dass $\psi\perp\langle -uv\rangle$ isotrop wäre, was nicht möglich ist, da $\varphi\perp\langle -uw\rangle$ anisotrop ist. Somit kann ψ ebenso wie φ kein Pfisternachbar sein.

Aus Lemma 4.1.16 folgt weiterhin

$$\langle 1, -u, -vw, uvw\rangle \;\cong\; \langle\langle -u, -vw\rangle\rangle \;\sim\; 0 \tag{4.5}$$

und somit

$$\begin{aligned}\psi\perp -vw\varphi &\cong \langle -a,-b,ab,u,v\rangle\perp -vw\langle -a,-b,ab,u,w\rangle \\ &\cong (\langle 1,-vw\rangle\otimes\langle -a,-b,ab\rangle)\perp\langle 1,-vw\rangle\perp\mathbb{H} && \text{nach (4.5)} \\ &\cong \langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle\perp\mathbb{H}.\end{aligned}$$

Trivialerweise ist ψ_L isotrop, und per Annahme ist auch φ_L isotrop. Es folgt

$$\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle\perp\mathbb{H} \;\cong\; \psi_L\perp -vw\varphi_L \;\cong\; \mathbb{H}\perp\mathbb{H}\perp\ldots$$

und somit die Isotropie von $\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle_L$. Also gilt $\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle \Subset W(L/K)$. Nehmen wir an, $\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle$ sei anisotrop, so folgt aus Satz 2.2.4, dass ψ ähnlich einer Teilform von $\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle$ und somit ein Pfisternachbar ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Isotropie von $\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle$. Folglich ist $\langle\langle -a,-b,-vw\rangle\rangle$ hyperbolisch, und es gilt $\psi\cong vw\varphi$. $\square$

Aus den Propositionen 4.1.13, 4.1.17 und 4.1.18 ergibt sich zusammenfassend das folgende Theorem.

4.1.19 Theorem. *Sei φ eine anisotrope, 5-dimensionale Form über K, die kein Pfisternachbar ist. Mit ψ bezeichnen wir eine anisotrope Form über K mit $2\leq m =: \dim(\psi)$, die für $m=4$ nicht ähnlich einer 2-fachen Pfisterform sei. Setze $L := K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.*

[Hof95a, Main Theorem, Seite 218]

Beweis. Die Behauptung für den Fall $m=2$, folgt sofort aus Satz 1.2.5. Die Fälle $m=3,4$ und 5 haben wir bereits bewiesen. Sei also $m\geq 6$. Wir müssen zeigen, dass φ_L anisotrop ist. Nach Lemma 4.1.9 reicht es den Fall $m=6$ zu betrachten. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass eine Darstellung $\psi\cong\langle 1,a_1,\ldots,a_5\rangle$ mit $a_1,\ldots,a_5\in K^*$ existiert. Betrachte $\chi := \langle X^2+a_1,a_2,\ldots,a_5\rangle$ über $E=K(X)$. Nach Lemma 4.1.7 gilt $K(\psi)\cong E(\chi)$.

Wir nehmen an, φ_E ist exzellent. Nach Proposition 3.2.31 kann $c(\varphi_E)$ von einer einzigen Quaternionenalgebra dargestellt werden. Da E rein transzendent über K ist, kann auch $c(\varphi)$ von einer einzigen Quaternionenalgebra dargestellt werden. Da aber φ als nicht-exzellent vorausgesetzt wurde, ist dies ein Widerspruch. Also ist auch φ_E kein Pfisternachbar.

Nun nehmen wir an, φ_L ist isotrop. Wegen $\dim(\eta)=5$ können wir auf den Fall $m=5$ zurückgreifen. Es existiert also ein $f\in K[X]$ mit

$$\varphi_E \;\cong\; f\langle X^2+a_1,a_2,\ldots,a_5\rangle.$$

Da ψ anisotrop und somit $[a_1]^\square\neq[-1]^\square$ ist, muss X^2+a_1 irreduzibel sein. Durch einen Determinantenvergleich sehen wir, dass $f=r(X^2+a_1)$ mit $r\in K^*$ gewählt werden kann, da φ über K definiert ist. Es folgt $\partial_1^{(X^2+a_1)}(\varphi_E)\sim\langle\overline{r}\rangle_E$. Da aber

$$\kappa_{(X^2+a_1)} \;\cong\; K[X]/(X^2+a_1) \;\cong\; K(\sqrt{-a_1})$$

ist, gilt $\varphi\otimes K(\sqrt{-a_1})\sim\langle r\rangle\otimes K(\sqrt{-a_1})$. Die Körper $K(\sqrt{-a_1})$ und $K(\langle 1,a_1\rangle)$ sind über K äquivalent, weshalb durch zweimaliges Anwenden von Satz 1.2.5 die Existenz einer 2-dimensionalen Form ρ über K folgt, so dass $\varphi\cong(\langle\langle a_1\rangle\rangle\otimes\rho)\perp\langle d(\varphi)\rangle$ gilt. Also wird $d(\varphi)$ von φ dargestellt. Dies ist nicht möglich, da φ ansonsten ein Pfisternachbar wäre. Folglich muss φ_L anisotrop sein. $\square$

Bei der Formulierung des eben bewiesenen Theorems haben wir ausgeschlossen, dass φ ein Pfisternachbar ist. Dies ist jedoch nur ein Spezialfall von Theorem 2.2.11. Ferner haben wir, wie schon bei Theorem 4.1.10, den Fall $\psi \Subset GP_2(K)$ ausgeschlossen. Leicht erhält man ein zu Satz 4.1.11 analoges Resultat.

4.1.20 Satz. *Seien φ und ψ anisotrope Formen über K mit $\dim(\varphi) = 5$ und $\psi \Subset GP_2(K)$. Ferner sei φ kein Pfisternachbar. Dann ist $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop, wenn jede 3-dimensionale Teilform von ψ ähnlich einer Teilform von φ ist.*

Beweis. Nach Lemma 4.1.2 sind alle 3-dimensionalen Teilformen von ψ ähnlich. Sei also ψ' eine beliebige 3-dimensionale Teilform von ψ. Dann sind die Funktionenkörper $K(\psi)$ und $K(\psi')$ äquivalent, und es ist $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop, wenn $\varphi \otimes K(\psi')$ isotrop ist. Nach dem vorigen Theorem ist dies genau dann der Fall, wenn ψ' ähnlich einer Teilform von φ ist. $\square$

4.1.4 Eine weitere Klasse 6-dimensionaler Formen

Sei φ eine anisotrope, 6-dimensionale Form über K und $d \in d(\varphi)$. Für den Rest des gesamten Unterabschnitts sei

$$E := K(\sqrt{d}), \qquad d \in d(\varphi). \tag{4.6}$$

Ist φ_E isotrop, so existiert eine Form φ' über K und ein $y \in K^*$ mit $\varphi \cong \varphi' \perp y\langle 1, -d\rangle$. Da $d(\varphi') = 1$ gilt, existieren $a, b, z \in K^*$, so dass $\varphi' \cong z\langle\langle a, b\rangle\rangle$ ist. Da es uns nur auf Ähnlichkeit ankommt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\varphi \;\cong\; \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp x\langle 1, -d\rangle \tag{4.7}$$

mit einem $x \in K^*$ gilt.

Wir werden nur am Anfang dieses Unterabschnitts von einer beliebigen 6-dimensionalen Form φ über K ausgehen. Recht bald werden wir uns auf die Betrachtung von 6-dimensionalen Formen beschränken, welche isotrop über E sind. In diesem Fall gehen wir grundsätzlich davon aus, dass eine Darstellung wie in (4.7) existiert. Außerdem sei dann

$$\alpha := \langle d, a, b, ab\rangle \qquad \text{und} \qquad F := K(\alpha). \tag{4.8}$$

4.1.21 Bemerkung. Ist φ_E isotrop, so ist zu beachten, dass φ keine Albert-Form sein kann, da $d(\varphi) = 1$ die Isotropie von φ implizieren würde, die wir ausgeschlossen hatten. Beachte weiterhin, dass nach Proposition 3.2.32 φ_E insbesondere dann isotrop ist, wenn φ exzellent ist. In diesem Fall wird φ von $\langle 1, -d\rangle$ geteilt, weshalb φ_E sogar hyperbolisch ist. $\triangle$

4.1.22 Lemma. *Seien $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp x\langle 1, -d\rangle$ und $\alpha \cong \langle d, a, b, ab\rangle$ anisotrop über K und $d \notin K^{*2}$. Dann sind α_F und φ_F nicht hyperbolisch.*

Beweis. Nach Satz 2.1.22 ist K in $F = K(\alpha)$ algebraisch abgeschlossen, weshalb $d \notin F^{*2}$ liegt. Wegen $1 \neq d(\varphi_F) = d(\alpha_F)$ können α_F und φ_F nicht hyperbolisch sein. $\square$

4.1.23 Lemma. *Ist $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp x\langle 1, -d\rangle$ anisotrop über K, so ist φ_F anisotrop.*

[Hof94, Proposition 2.1, Seite 2001]

Beweis. Ist α isotrop, so bleibt φ_F sicherlich anisotrop, da in diesem Fall $F = K(\alpha)$ rein transzendent über K ist. Wir können also annehmen, dass α anisotrop ist. Zusätzlich nehmen wir an, φ_F sei isotrop.

Da wir vorausgesetzt hatten, dass φ anisotrop ist, folgt $d \notin K^{*2}$ und somit nach Lemma 4.1.22
$$2 \leq \dim((\varphi_F)_{an}) \leq 4 \qquad \text{und} \qquad \dim((\alpha_F)_{an}) = 2.$$
Es gilt weiterhin
$$\varphi \perp x\alpha \;\cong\; \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp x\langle 1,-d\rangle \perp x\langle d,a,b,ab\rangle \;\sim\; \langle\langle a,b,x\rangle\rangle \tag{4.9}$$
und somit $(\varphi_F)_{an} \perp x(\alpha_F)_{an} \sim \langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$. Weil die Dimension der linken Seite maximal 6 ist, muss $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$ hyperbolisch sein. Nach Lemma 4.1.14 existiert ein $-y \in D_K^*(\langle 1,-d\rangle)$, so das $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle \cong \langle\langle a,b,y\rangle\rangle$ ist. Insbesondere bedeutet dies $x\langle\langle a,b\rangle\rangle \cong y\langle\langle a,b\rangle\rangle$. Da $\langle 1,-d\rangle$ eine Pfisterform ist, folgt aus $-y \in D_K^*(\langle 1,-d\rangle) = G_K(\langle 1,-d\rangle)$
$$\begin{aligned} x\varphi &\cong x\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle 1,-d\rangle \\ &\cong y\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp -y\langle 1,-d\rangle \\ &\cong \langle y,-y\rangle \perp y\langle d,a,b,ab\rangle. \end{aligned}$$
Dies ist ein Widerspruch zur Anisotropie von φ, weshalb φ_F anisotrop sein muss. □

4.1.24 Korollar. *Sei $\varphi \cong \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp x\langle 1,-d\rangle$ anisotrop über K. Ist $y \in D_K^*(x\langle 1,-d\rangle)$, so ist φ_F ein anisotroper Pfisternachbar der Pfisterform $\langle\langle a,b,y\rangle\rangle_F$.*

[Hof94, Corollary 2.2, Seite 2002]

Beweis. Die Form α kann nicht hyperbolisch sein, denn ansonsten würde $d \in K^{*2}$ gelten und φ isotrop sein. Ist α anisotrop, so folgt aus Lemma 4.1.22, dass α_F nicht hyperbolisch ist. In jedem Fall gilt also $\dim((\alpha_F)_{an}) = 2$, und nach (4.9) gilt $\varphi \perp x\alpha \sim \langle\langle a,b,x\rangle\rangle$. Weiterhin ist φ_F nach dem vorherigen Lemma anisotrop, weshalb aus Dimensionsgründen $\varphi_F \perp x(\alpha_F)_{an} \cong \langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$ gelten muss. Sicherlich ist φ_F ein Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$. Liegt $y \in D_K^*(x\langle 1,-d\rangle)$, so ist die Form $\langle\langle a,b\rangle\rangle \perp \langle y\rangle \subset \varphi$ ein Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,y\rangle\rangle$ und über F zusätzlich ein Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$. Da die Pfisterform zu einem gegebenen Pfisternachbarn eindeutig bestimmt ist, folgt $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F \cong \langle\langle a,b,y\rangle\rangle_F$. □

4.1.25 Lemma. *Seien $\varphi \cong \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp x\langle 1,-d\rangle$ und ψ anisotrope Formen über K und $L = K(\psi)$. Ist φ_L isotrop, so ist ψ_F anisotrop und ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$.*

[Hof94, Lemma 3.1, Seite 2003]

Beweis. Nach Lemma 4.1.23 und Korollar 4.1.24 ist φ_F ein anisotroper Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$. Wir nehmen an, φ_L sei isotrop. Dann ist $\varphi_F \otimes F(\psi_F)$ ebenfalls isotrop und somit $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F \otimes F(\psi_F)$ hyperbolisch. Folglich muss ψ_F anisotrop sein, da ansonsten $F(\psi_F)$ rein transzendent über F und $\varphi_F \otimes F(\psi_F)$ anisotrop wäre. Nach Satz 2.2.4 muss ψ_F ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$ sein. □

Die erste Behauptung des folgenden Theorems folgt direkt aus dem Anisotropiekriterium 3.2.3. Wir wollen hier allerdings Hoffmanns alternativen Beweis angeben, der die in diesem Unterabschnitt bereits erarbeiteten Resultate verwendet.

4.1.26 Theorem. *Seien φ und ψ anisotrope Formen über K mit $\dim(\varphi) = 6$, $d \in d(\varphi)$, $m := \dim(\psi)$, $E := K(\sqrt{d})$ und $L := K(\psi)$.*

(1) Ist $m \geq 9$, so ist φ_L anisotrop.

(2) Ist $m \geq 7$ und φ_E anisotrop, so ist φ_L ebenfalls anisotrop.

[Hof94, Theorem 2, Seite 2001]

Beweis. (1): Ist φ_E anisotrop, so verweisen wir auf den Beweis der zweiten, stärkeren Behauptung. Sei also φ_E isotrop. Ohne Einschränkung können wir $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp x\langle 1, -d\rangle$ mit $a, b, x \in K^*$ annehmen. Wie oben sei $\alpha := \langle d, a, b, ab\rangle$ und $F := K(\alpha)$. Wir nehmen an φ_L sei isotrop. Nach Lemma 4.1.25 ist ψ_F ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$. Es folgt der Widerspruch $\dim(\psi) \leq 8$.

(2): Wir nehmen wieder an, φ_L sei isotrop. Nach Voraussetzung ist φ_E anisotrop und wegen $d \in E^{*2}$ eine Albert-Form. Da $\varphi \otimes E(\psi_E)$ isotrop ist, muss ψ_E anisotrop sein. Dann folgt aus Theorem 4.1.10, dass ψ_E eine Teilform von φ_E ist. Dies ist nicht möglich, da $6 = \dim(\varphi) < 7 \leq \dim(\psi)$ vorausgesetzt wurde. □

Von nun an bis zum Ende dieses Unterabschnitts gehen wir davon aus, dass die Form φ_E isotrop ist. Für diese spezielle Klasse 6-dimensionaler Formen, wollen wir ein zu Theorem 4.1.10 analoges Resultat erarbeiten. Wir betrachten dafür die möglichen Dimensionen von ψ einzeln. Hierbei verwenden wir die Notationen aus (4.6), (4.7) und (4.8).

4.1.27 Lemma. *Sei τ eine 3-fache Pfisterform über K und $d \in K^* \setminus K^{*2}$. Dann gilt genau dann $\tau_F \cong \langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$, wenn ein $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ mit $\tau \cong \langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ existiert.*

[Hof94, Lemma 3.2, Seite 2003][1]

Beweis. Sei zunächst $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ mit $\tau \cong \langle\langle a, b, y\rangle\rangle$. Dann gilt

$$\tau \perp -\langle\langle a, b, x\rangle\rangle \sim y\langle 1, a, b, ab\rangle \perp -x\langle 1, a, b, ab\rangle \cong y\langle\langle a, b, -xy\rangle\rangle,$$

und es liegt $xy \in D_K^*(\langle 1, -d\rangle)$. Ist $\alpha = \langle d, a, b, ab\rangle$ isotrop, so gilt

$$\begin{aligned} \langle\langle a, b, -xy\rangle\rangle \perp -\alpha &\sim \langle 1, -d\rangle \perp -xy\langle\langle a, b\rangle\rangle \\ &\cong -xy(-xy\langle 1, -d\rangle \perp \langle\langle a, b\rangle\rangle) \\ &\cong -xy(-\langle 1, -d\rangle \perp \langle\langle a, b\rangle\rangle) \sim -xy\alpha. \end{aligned}$$

Da α isotrop ist, muss $\langle\langle a, b, -xy\rangle\rangle$ hyperbolisch sein. Hieraus folgt $\tau \cong \langle\langle a, b, x\rangle\rangle$ und somit die Behauptung. Ist α anisotrop, so zerfällt $\langle\langle a, b, -xy\rangle\rangle_F$ nach Lemma 4.1.14. Somit folgt auch in diesem Fall sofort die zur Behauptung äquivalente Aussage $\tau_F \perp -\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F \sim 0$.

Es gelte andererseits $\tau_F \cong \langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$. Ist α isotrop, so ist $F = K(\alpha)$ rein transzendent über K, weshalb bereits $\tau \cong \langle\langle a, b, x\rangle\rangle$ gelten muss. Sei α fortan anisotrop. Den trivialen Fall $\tau \cong \langle\langle a, b, x\rangle\rangle$ schließen wir im Folgenden aus. Dann ist $\tau_F \perp -\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F \sim 0$, und es gilt $\sigma := (\tau \perp -\langle\langle a, b, x\rangle\rangle)_{an} \in W(F/K)$. Offensichtlich ist $2 \leq \dim(\sigma) \leq 14$, und da $W(F/K)$

[1] Hoffmann vergisst in seinem Beweis dieses Lemmas den Fall zu betrachten, dass α isotrop ist. Sein Beweis hängt wesentlich von [Fit83, Example, Seite 94] ab, doch Fitzgerald fordert in seinem Beispiel die Anisotropie von α.

nach Korollar 3.1.17 ein strenges 3-Pfister-Ideal ist, muss $\dim(\sigma) = 8$ gelten und σ ähnlich einer 3-fachen Pfisterform sein. Nach Lemma 4.1.14 existiert ein $-z \in D_K^*(\langle 1, -d\rangle)$ und ein $c \in D_K^*(\sigma)$ mit $\sigma \cong c\langle\langle a, b, z\rangle\rangle$. Es folgt

$$\tau\perp - \langle\langle a, b, x\rangle\rangle \sim \sigma \cong c\langle\langle a, b, z\rangle\rangle \sim \langle\langle a, b, z\rangle\rangle\perp - \langle\langle a, b, z, -c\rangle\rangle \equiv \langle\langle a, b, z\rangle\rangle \mod I^4(K)$$

und weiter

$$\begin{aligned}\tau &\equiv \langle\langle a, b, z\rangle\rangle\perp\langle\langle a, b, x\rangle\rangle \equiv \langle\langle a, b, z\rangle\rangle\perp\langle\langle a, b, x\rangle\rangle\perp - \langle\langle a, b, x, z\rangle\rangle \\ &\sim \langle\langle a, b\rangle\rangle \otimes \langle 1, -xz\rangle \cong \langle\langle a, b, -xz\rangle\rangle \mod I^4(K).\end{aligned}$$

Somit gilt $\tau\perp - \langle\langle a, b, -xz\rangle\rangle \Subset I^4(K)$. Da sowohl τ als auch $\langle\langle a, b, -xz\rangle\rangle$ die 1 darstellen, ist $\dim((\tau\perp - \langle\langle a, b, -xz\rangle\rangle)_{an}) < 16$. Aus dem Arason-Pfister-Hauptsatz 2.2.14 folgt $\tau \cong \langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ mit $y = -xz \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$. □

4.1.28 Lemma. *Seien ψ, β Formen über K, wobei $\dim(\beta) \geq 4$ und $\beta \notin GP_2(K)$ gelte, und sei $L = K(\beta)$. Dann gilt genau dann $c(\psi_L) = 1$, wenn $c(\psi) = 1$ ist.*

Beweis. Ist $c(\psi) = 1$, so ist sicher auch $c(\psi_L) = 1$. Setze umgekehrt $c(\psi_L) = 1$ voraus. Ist β isotrop, so ist L rein transzendent über K und die Behauptung trivial. Sei fortan β anisotrop. Wir nehmen an, es wäre $c(\psi) \neq 1$. Dann kann $c(\psi)$ nach Korollar 1.3.8 nur den Index 1 oder 2 besitzen, da $K(\psi)$ eine quadratische Erweiterung einer rein transzendenten Erweiterung von K ist. Gilt $\mathrm{ind}(c(\psi)) = 1$, so ist bereits $c(\psi) = 1$. Ist $\mathrm{ind}(c(\psi)) = 2$, so existiert eine 2-fache Pfisterform $\sigma \not\sim 0$ über K, so dass $c(\psi) = c(\sigma)$ gilt. Aus $c(\sigma_F) = 1$ folgt nach Proposition 1.3.28, dass $\sigma_F \sim 0$ gilt. Nach Satz 4.1.5 ist β ähnlich einer Teilform von σ, was nicht möglich ist, da $\beta \notin GP_2(K)$ und $\dim(\beta) \geq 4$ vorausgesetzt wurde. Also muss $\mathrm{ind}(c(\psi)) = 1$ und somit $c(\psi) = 1$ gelten. □

4.1.29 Lemma. *Seien $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle\perp x\langle 1, -d\rangle$ und ψ anisotrope Formen über K so, dass ψ ähnlich einer Teilform von φ oder von $\langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ mit $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ ist, dann ist $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop.*

Beweis. Ist ψ ähnlich einer Teilform von φ, so ist $\varphi \otimes K(\psi)$ offensichtlich isotrop. Ist ψ ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a, b, y\rangle\rangle$, so ist $\varphi \otimes K(\psi)$ isotrop, da $\langle\langle a, b, y\rangle\rangle \otimes K(\psi) \sim 0$ gilt und $\langle\langle a, b\rangle\rangle\perp\langle y\rangle \subset \varphi$ ein Pfisternachbar von $\langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ ist. □

4.1.30 Proposition. *Sei $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle\perp x\langle 1, -d\rangle$ anisotrop und ψ eine anisotrope, 7 oder 8-dimensionale Form über K, $L := K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ein $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ existiert, so dass ψ ein Pfisternachbar der Form $\langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ ist.*

[Hof94, Proposition 3.5, Seite 2005]

Beweis. Die eine Richtung folgt sofort aus Lemma 4.1.29. Sei umgekehrt φ_L isotrop. Nach Lemma 4.1.25 ist ψ_F ein anisotroper Pfisternachbar von $\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$. Ist $\dim(\psi) = 7$, so ist ψ_F nach Proposition 3.2.33 genau dann ein Pfisternachbar, wenn $c(\psi_F) = 1$ ist. Nach Lemma 4.1.28 ist dies genau dann der Fall, wenn $c(\psi) = 1$ gilt, und also genau dann, wenn ψ bereits ein Pfisternachbar ist. Sei nun $\dim(\psi) = 8$. Da K in F algebraisch abgeschlossen ist, gilt genau dann $d(\psi) = 1$, wenn $d(\psi_F) = 1$ ist. Nach Proposition 3.2.30 und Lemma 4.1.28 ist also ψ_F genau dann ein Pfisternachbar, wenn ψ ein Pfisternachbar ist.

Sei ρ die zu ψ gehörige Pfisterform. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn $\varphi\otimes K(\rho)$ isotrop ist. Hieraus folgt die Isotropie von $\varphi \otimes F(\rho)$. Nach Korollar 4.1.24 ist φ_F ein anisotroper Pfisternachbar der Form $\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$, weshalb $\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F \Subset W(F(\rho_F)/F)$ liegen muss. Dies bedeutet $\rho_F \cong \langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$, und nach Lemma 4.1.27 existiert ein $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ mit $\rho \cong \langle\langle a, b, y\rangle\rangle$. □

4.1.31 Lemma. *Sei χ eine anisotrope, 4-dimensionale Form über K, $d \in d(\chi)$ und $E = K(\sqrt{d})$. Dann ist χ_E anisotrop.*

Beweis. Wir nehmen an, χ_E sei isotrop. Nach Satz 1.2.5 existieren $x, u, v \in K^*$ mit $\chi \cong x\langle 1, -d\rangle\perp\langle u, v\rangle$. Dann folgt aus $d(\chi) = [-duv]^\square = [d]^\square$, dass $[u]^\square = [-v]^\square$ gelten und somit bereits χ isotrop sein muss. □

4.1.32 Lemma. *Seien $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle\perp x\langle 1, -d\rangle$ und $\psi \cong \langle\langle u, v\rangle\rangle\perp w\langle 1, -d\rangle$ anisotrop über K, und sei $E = K(\sqrt{d})$, $\dim((\psi_E)_{an}) = 4$ und ψ_F ein Pfisternachbar von $\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$. Ist $\psi_E \Subset W(E(\alpha_E)/E)$, so sind φ und ψ ähnlich.*

[Hof94, Beweis von Proposition 3.6, Seite 2005]

Beweis. Setze $\zeta := \langle d, u, v, uv\rangle$ und $\pi := \langle\langle u, v, w\rangle\rangle$. Aus $\dim((\psi_E)_{an}) = 4$ folgt die Anisotropie von $\zeta_E \cong \langle\langle u, v\rangle\rangle_E \cong (\psi_E)_{an}$. Also muss auch ζ anisotrop sein. Weiterhin zerfällt ζ nach Voraussetzung über $E(\alpha_E) \cong F(\sqrt{d})$. Nach dem vorherigen Lemma 4.1.31 muss deshalb bereits ζ_F isotrop sein. Aus Satz 4.1.5 folgt, dass α und ζ ähnlich sind. Das heißt, es existiert ein $r \in K^*$ mit

$$r\alpha \;\cong\; r\langle d, a, b, ab\rangle \;\cong\; \langle d, u, v, uv\rangle. \tag{4.10}$$

Nun ist ψ_F nach Voraussetzung ein Pfisternachbar der Pfisterform $\langle\langle a, b, x\rangle\rangle_F$. Weiterhin ist ψ_F ein Pfisternachbar von $\pi_F = \langle\langle u, v, w\rangle\rangle_F$, da ψ den Pfisternachbar $\langle\langle u, v\rangle\rangle\perp\langle w\rangle$ enthält. Nach Lemma 4.1.27 existiert ein $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$, so dass $\pi \cong \langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ gilt. Außerdem ist $y\langle 1, -d\rangle \cong xy^2\langle 1, -d\rangle \cong x\langle 1, -d\rangle$, da $xy \in D_K^*(\langle 1, -d\rangle) = G_K(\langle 1, -d\rangle)$ liegt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\varphi\perp y\langle d, a, b, ab\rangle &\cong \langle\langle a, b\rangle\rangle\perp y\langle 1, -d\rangle\perp y\langle d, a, bab\rangle\\
&\cong \langle\langle a, b, y\rangle\rangle\perp\mathbb{H}\\
&\cong \pi\perp\mathbb{H}\\
&\cong \langle\langle u, v\rangle\rangle\perp w\langle 1, -d\rangle\perp w\langle d, u, v, uv\rangle\\
&\cong \psi\perp w\langle d, u, v, uv\rangle,
\end{aligned}$$

und aus $w, y \in D_K^*(\pi) = G_K(\pi)$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
\langle\langle u, v, w, -r\rangle\rangle\perp(2\times\mathbb{H}) &\cong \pi\perp -r\pi\perp(2\times\mathbb{H})\\
&\cong y\pi\perp\mathbb{H}\perp -rw\pi\perp\mathbb{H}\\
&\cong y\psi\perp wy\langle d, u, v, uv\rangle\perp -rw\psi\perp -rw^2\langle d, u, v, uv\rangle\\
&\cong y\psi\perp wy\langle d, u, v, uv\rangle\perp -rw\varphi\perp -rwy\langle d, a, b, ab\rangle\\
&\underset{(4.10)}{\cong} y\psi\perp -rw\varphi\perp(4\times\mathbb{H}).
\end{aligned}$$

Also ist $\langle\langle u, v, w, -r\rangle\rangle$ isotrop und somit hyperbolisch. Es folgt $y\psi \cong rw\varphi$. □

4.1.33 Proposition. *Sei $\varphi \cong \langle\langle a,b\rangle\rangle \perp x\langle 1,-d\rangle$ anisotrop über K und ψ eine anisotrope Form der Dimension 5 oder 6 über K, $L := K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist oder ein $y \in D_K^*(x\langle 1,-d\rangle)$ existiert, so dass ψ ein Pfisternachbar der Form $\langle\langle a,b,y\rangle\rangle$ ist.*

[Hof94, Proposition 3.6, Seite 2005]

Beweis. $\dim(\psi) = 6$*:* Die eine Richtung folgt sofort aus Lemma 4.1.29. Gehen wir nun davon aus, dass φ_L isotrop ist. Dann ist nach Lemma 4.1.25 ψ_F ein anisotroper Pfisternachbar der Form $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$. Sei $e \in d(\psi)$ und $M = K(\sqrt{e})$. Da ψ_F ein Pfisternachbar ist, folgt $\psi \otimes F(\sqrt{e}) \sim 0$ aus Proposition 3.2.32. Aus $F(\sqrt{e}) \cong M(\alpha_M)$ folgt

$$\psi_M \ \Subset \ W(M(\alpha_M)/M). \tag{4.11}$$

Ist $\psi_M \sim 0$, so folgt aus Proposition 3.2.32, dass ψ ein Pfisternachbar ist. Insbesondere existiert nach Lemma 4.1.27 ein $y \in D_K^*(x\langle 1,-d\rangle)$, so dass ψ ein Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,y\rangle\rangle$ ist. Gehen wir also davon aus, ψ_M sei nicht hyperbolisch. Dann muss α_M wegen (4.11) anisotrop sein. Ist $[d]^{\square} \neq [e]^{\square}$, so ist insbesondere $[d]_M^{\square} \neq 1$. Aus Korollar 3.1.17 folgt dann ein Widerspruch zu (4.11), da in diesem Fall $W(M(\alpha_M)/M)$ ein strenges 3-Pfister-Ideal ist und $2 \leq \dim((\psi_M)_{an}) \leq 6$ gilt.

Es muss also $[d]^{\square} = [e]^{\square}$ und insbesondere $M = E$ gelten. Folglich ist α_M eine 2-fache Pfisterform und es gilt

$$0 \not\sim \psi_M \ \Subset \ W(M(\alpha_M)/M) = (\{\alpha_M\}). \tag{4.12}$$

Da ψ_M nicht hyperbolisch ist und $\psi \otimes M(\alpha_M)$ zerfällt, existiert eine Form χ über M mit $\psi \cong \alpha_M \otimes \chi$. Wegen $2 \leq \dim((\psi_M)_{an}) \leq 6$ folgt $\dim(\chi) = 1$. Also sind $(\psi_M)_{an}$ und α_M ähnlich. Insbesondere ist ψ_M isotrop, weshalb $u,v,w \in K^*$ mit

$$\psi \ \cong \ \langle\langle u,v\rangle\rangle \perp w\langle 1,-d\rangle$$

existieren. Hieraus folgt $(\psi_M)_{an} \cong (\langle\langle u,v\rangle\rangle_M)_{an}$. Weiterhin ist $\dim((\psi_M)_{an}) = 4$ und ψ_F ein Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,x\rangle\rangle_F$, weshalb aus Lemma 4.1.32 die Ähnlichkeit von φ und ψ folgt.

$\dim(\psi) = 5$*:* Ist ψ ähnlich einer Teilform von φ oder ein Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,y\rangle\rangle$, so folgt aus Lemma 4.1.29 die Isotropie von φ_L. Nun gehen wir umgekehrt davon aus, dass φ_L isotrop ist. Sei $\langle u,v,uv\rangle \subset \psi$ eine 3-dimensionale Teilform mit geeigneten $u,v \in K^*$. Dann existieren $r,s \in K^*$ mit $\psi \cong \langle u,v,uv,r,s\rangle$. Ist ψ ein Pfisternachbar, so folgt aus den Lemmata 4.1.25 und 4.1.27, dass ψ ein Pfisternachbar von $\langle\langle a,b,y\rangle\rangle$ ist, $y \in D_K^*(x\langle 1,-d\rangle)$.

Sei nun ψ kein Pfisternachbar. Dann ist nach Proposition 3.2.31 die Form $\psi \perp \langle -rs\rangle \in I^2(K)$ anisotrop. Nach Lemma 4.1.25 ist ψ_F ein anisotroper Pfisternachbar, und durch erneutes Anwenden von Proposition 3.2.31 folgt, dass $(\psi \perp \langle -rs\rangle)_F$ isotrop ist. Nach Theorem 4.1.10 ist α ähnlich einer Teilform von $\psi \perp \langle -rs\rangle$. Das heißt, es existieren $e,f \in K^*$ mit

$$\psi \perp \langle -rs\rangle \ \cong \ f\langle d,a,b,ab,e,-ed\rangle.$$

Da die Formen α_F und $\langle e,-ed\rangle \otimes F(\sqrt{d})$ isotrop sind, folgt $i((\psi \perp \langle -rs\rangle) \otimes F(\sqrt{d})) \geq 2$. Aus $d(\psi \perp \langle -rs\rangle) = 1$, folgt $(\psi \perp \langle -rs\rangle) \otimes F(\sqrt{d}) \sim 0$ und somit

$$(\psi \perp \langle -drs\rangle) \otimes F(\sqrt{d}) \sim 0. \tag{4.13}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $(\psi \perp \langle -drs \rangle)_F$ anisotrop ist. Sei $\delta := (\psi_F \perp \langle -drs \rangle_F)_{an}$. Da ψ_F anisotrop ist, muss $\dim(\delta) = 4$ oder 6 sein. Wir nehmen zunächst $\dim(\delta) = 4$ an. Wegen $[d]_F^{\square} = d(\delta)$ folgt aus Lemma 4.1.31, dass $\delta \otimes F(\sqrt{d})$ anisotrop ist, ein Widerspruch zu (4.13).

Also ist $\dim(\delta) = 6$. Setzen wir $\gamma := \psi \perp \langle -drs \rangle$, so ist also $\gamma_F \cong \delta$ anisotrop und $\gamma \otimes F(\sqrt{d})$ hyperbolisch. Nach Proposition 3.2.32 ist γ_F ein Pfisternachbar. Da ψ_F ein Pfisternachbar von $\langle\langle a, b, x \rangle\rangle_F$ ist, muss dies auch für γ_F gelten.

Setze $E := K(\sqrt{d})$. Dann ist

$$\gamma_E \;\cong\; (\psi \perp \langle -rs \rangle)_E \;\cong\; f\langle d, a, b, ab, e, -ed \rangle_E$$

isotrop. Das heißt, es existieren $u, v, w \in K^*$ mit $\gamma \cong \langle\langle u, v \rangle\rangle \perp w\langle 1, -d \rangle$. Da $\psi \subset \gamma$ kein Pfisternachbar ist, kann γ kein Pfisternachbar sein. Nach Proposition 3.2.32 kann γ_E nicht zerfallen, da γ ansonsten von $\langle 1, -d \rangle$ geteilt würde und somit ein Pfisternachbar wäre. Also muss $\langle\langle u, v \rangle\rangle_E$ anisotrop sein und $\dim((\gamma_E)_{an}) = 4$ gelten. Weiterhin ist $E(\alpha_E) \cong F(\sqrt{d})$, γ_F ein Pfisternachbar von $\langle\langle a, b, x \rangle\rangle_F$ und $\gamma_E \Subset W(E(\alpha_E)/E)$ nach (4.13). Also folgt aus Lemma 4.1.32 die Ähnlichkeit von γ und φ und somit die Behauptung. □

Sei ψ eine anisotrope Form über K mit $\dim(\psi) = 3$. Der Beweis der folgenden Proposition von Hoffmann (siehe [Hof94, Proposition 3.8, Seite 2008]) verwendet die Exzellenz von $K(\psi)$ über K. Dabei heißt eine Körperweiterung L von K *exzellent*, falls es zu jeder Form χ über K eine anisotrope Form ζ über K mit $(\chi_L)_{an} \cong \zeta_L$ gibt. Erstmals hat Arason in [ELW77, Appendix 2] bewiesen, dass der Funktionenkörper einer 3-dimensionalen Form exzellent ist. Arason verwendete dabei Methoden aus der algebraischen Geometrie. Erst Rost hat in [Ros90] einen elementaren Beweis für dieses Resultat geliefert.

Sei L eine Körpererweiterung von K. Im Beweis der folgenden Proposition verwendet Hoffmann zusätzlich den Begriff einer L-minimalen Form. Dabei heißt eine anisotrope Form χ über K *L-minimal*, falls jede echte Teilform von χ über L anisotrop bleibt. Kennt man alle L-minimalen Formen über K, so kennt man auch alle Formen über K, die über L isotrop werden. Eine Einführung zu L-minimalen Formen und weiterführende Resultate über diese finden sich in den Abschnitten 2.6, 3.1 und 3.2 von [Hof92].

Uns stehen diese Begriffe und die nötigen Resultate hier nicht zur Verfügung, weshalb wir uns aus Gründen der Vollständigkeit damit begnügen wollen, dass folgende Resultat ohne Beweis zu zitieren.

4.1.34 Proposition. *Sei $\varphi \cong \langle\langle a, b \rangle\rangle \perp x\langle 1, -d \rangle$ anisotrop über K und ψ eine anisotrope, 3-dimensionale Form über K, $L := K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist oder ein $y \in D_K^*(x\langle 1, -d \rangle)$ existiert, so dass ψ ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a, b, y \rangle\rangle$ ist.*

[Hof94, Proposition 3.8, Seite 2008]

Sei φ eine anisotrope 6-dimensionale Form über K. Ist die Form ψ über K isotrop, so bleibt $\varphi \otimes K(\psi)$ sicherlich anisotrop. Somit erhalten wir aus Theorem 4.1.26 und den Propositionen 4.1.30, 4.1.33 und 4.1.34 zusammenfassend das folgende Theorem.

4.1.35 Theorem. *Sei φ eine anisotrope, 6-dimensionale Form über K, für die $\varphi \otimes K(\sqrt{d})$ mit $d \in d(\varphi)$ isotrop sei. Ferner sei ψ eine Form über K mit $\dim(\psi) \geq 3$ und $\dim(\psi) \neq 4$.*

Setze $L := K(\psi)$. Dann ist φ_L genau dann isotrop, wenn ψ ähnlich einer Teilform von φ ist oder ein $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ existiert, so dass ψ ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ ist.

[Hof94, Theorem 3, Seite 3.8]

Den Fall $\dim(\psi) = 4$ haben wir generell ausgeschlossen. Dieser Fall ist tatsächlich besonders kompliziert und verlangt eine Behandlung mit Methoden aus der modernen Theorie der generischen Zerfällung. In Abbildung 3 im Appendix A sind einige Resultate ohne Beweis aufgelistet, die sich mit diesem Fall beschäftigen. Den Spezialfall $\psi \Subset GP_2(K)$, können wir jedoch selber behandeln.

4.1.36 Satz. *Seien $\varphi \cong \langle\langle a, b\rangle\rangle \perp x\langle 1, -d\rangle$ und $\psi \Subset GP_2(K)$ anisotrope Formen über K, und sei $\psi' \subset \psi$ eine 3-dimensionale Teilform. Dann ist $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop, wenn ψ' ähnlich einer Teilform von φ ist oder ein $y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ existiert, so dass ψ' ähnlich einer Teilform von $\langle\langle a, b, y\rangle\rangle$ ist.*

Beweis. Da die Funktionenkörper von ψ und ψ' äquivalent sind, ist $\varphi \otimes K(\psi)$ genau dann isotrop, wenn $\varphi \otimes K(\psi')$ isotrop ist. Aus Proposition 4.1.34 folgt somit die Behauptung. □

Anhang A

Tabellen

Dieses Kapitel dient der Zusammenfassung und übersichtlichen Darstellung einiger Resultate, die wir in dieser Arbeit behandelt haben. Dabei befassen wir uns vor allem mit niedrigdimensionalen Formen. Der Vollständigkeit halber werden wir zusätzlich eine Reihe von Resultaten aus der aktuelleren Forschung zitieren, die wir hier nicht beweisen können, da uns die nötigen Grundlagen fehlen.

$\dim(\varphi)$	anisotrop	φ exzellent	Referenz
≤ 3		immer	Prop. 3.2.29
4		$\Leftrightarrow\ d(\varphi) = 1$	
5		$\Leftrightarrow\ \langle d(\varphi)\rangle \subset \varphi$ $\Leftrightarrow\ \mathrm{ind}_K(c(\varphi)) \leq 2$	Prop. 3.2.31
6		$\Leftrightarrow\ \langle 1, -d(\varphi)\rangle \vert \varphi$ $\Leftrightarrow\ \exists\, c \in K^*$ mit $\langle 1, -c\rangle \vert \varphi$ $\Leftrightarrow\ c(\varphi) \otimes K(\sqrt{d}) = 1,\ d \in d(\varphi)$	Prop. 3.2.32
	$\surd$	$\Leftrightarrow\ i_1(\varphi) = 2$	
7		$\Leftrightarrow\ c(\varphi) = 1$	Prop. 3.2.33
8		$\Leftrightarrow\ d(\varphi) = 1$ und $c(\varphi) = 1$	Prop. 3.2.30
9		$\Leftrightarrow\ \langle d(\varphi)\rangle \subset \varphi$ und $c(\varphi) = 1$	Prop. 3.2.34
10		$\Leftrightarrow\ \langle 1, -d(\varphi)\rangle \vert \varphi$ und $\exists\, \eta \subset \varphi$ mit $\dim(\varphi) = 2$, $d(\eta) = d(\varphi)$ und $c(\eta) = c(\varphi)$	Prop. 3.2.35
11		$\Leftrightarrow\ \varphi \perp - \langle d(\varphi)\rangle$ ist exzellent	Prop. 3.2.38
12		$\Leftrightarrow\ \exists\, \tau \Subset P_2(K)$ mit $\tau \vert \varphi$	Prop. 3.2.37

Abbildung 1: exzellente Formen der Dimension ≤ 12

Abbildung 1 beschäftigt sich mit der Charakterisierung niedrigdimensionaler exzellenter Formen. In dieser Tabelle sind lediglich die Ergebnisse aus Unterabschnitt 3.2.5 zusammen-gefasst. Dabei ist hier zunächst irrelevant, ob die zu untersuchende Form φ anisotrop ist oder nicht. Ist jedoch $\dim(\varphi) = 6$, so können wir φ nur dann mit Hilfe des ersten Wittindex als exzellent identifizieren, wenn φ anisotrop ist.

Auch Abbildung 2 befasst sich nur mit Resultaten, die wir bereits bewiesen haben. Sie beinhaltet die Ergebnisse aus den Unterabschnitten 4.1.1 und 4.1.3 und nennt alle Formen ψ, für die eine gegebene anisotrope Form φ mit $\dim(\varphi) \leq 5$ über $K(\psi)$ isotrop wird. Die betrachteten Formen φ und ψ werden grundsätzlich als anisotrop vorausgesetzt. In der dritten Spalte werden die Voraussetzungen und zusätzliche Vereinbarungen genannt, unter denen die Aussage in der vierten Spalte anwendbar ist. Die vierte Spalte beinhaltet dann entweder eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Isotropie von $\varphi \otimes K(\psi)$ oder die Aussage, dass $\varphi \otimes K(\psi)$ unter den genannten Voraussetzungen aus den ersten drei Spalten grundsätzlich anisotrop ist.

$\dim(\varphi)$	$\dim(\psi)$	Voraussetzungen	$\varphi \otimes K(\psi)$	Referenz
2	beliebig		isotrop $\Leftrightarrow$ φ, ψ ähnlich	Satz 4.1.1
3	≤ 3		isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Satz 4.1.3
	4	$\psi \in GP_2(K)$, $\varphi \cong c\langle a, b, ab\rangle$, $a, b, c \in K^*$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\psi \cong z\langle\langle a, b\rangle\rangle$, $z \in K^*$	
	≥ 4	$\psi \notin GP_2(K)$	anisotrop	
4	≤ 3		isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Satz 4.1.5
	4	$\psi \in GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\forall\, \chi \subset \psi$, $\dim(\chi) = 3$, gilt $z\chi \subset \varphi$, $z \in K^*$	
		$\psi \notin GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ φ, ψ ähnlich	
	≥ 5		anisotrop	
5	≥ 2	φ kein Pfisternachbar, $\psi \notin GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Thm. 4.1.19
		φ kein Pfisternachbar, $\psi \in GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\forall\, \chi \subset \psi$, $\dim(\chi) = 3$, gilt $z\chi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Satz 4.1.20
		φ Pfisternachbar von $\tau \in P_3(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau$, $z \in K^*$	Thm. 2.2.11

Abbildung 2: Formen der Dimension ≤ 5

Mit Abbildung 3 versuchen wir eine vollständige Charakterisierung aller Formen ψ anzugeben, für die eine gegebene Form φ der Dimension 6 über $K(\psi)$ isotrop wird. Dies gelingt uns allerdings nur teilweise. Den Fall $d(\varphi) = 1$ haben wir im Unterabschnitt 4.1.2 vollständig untersucht. Ist jedoch $d(\varphi) \neq 1$, so werden wesentliche Fallunterscheidungen notwendig. Sei $d \in d(\varphi) \neq 1$. Wir unterscheiden die folgenden drei Typen von φ:

Typ 1: $\varphi \otimes K(\sqrt{d})$ ist hyperbolisch.

Typ 2: $\varphi \otimes K(\sqrt{d})$ ist isotrop aber nicht hyperbolisch.

Typ 3: $\varphi \otimes K(\sqrt{d})$ ist anisotrop.

Nach Proposition 3.2.32 und Satz 2.2.5 ist φ genau dann vom ersten Typ, wenn φ exzellent und somit ein Pfisternachbar ist. Dieser Fall wird vollständig von Theorem 2.2.11 abgedeckt. Die Ergebnisse aus Unterabschnitt 4.1.4 lassen sich sowohl auf die Formen vom Typ 1 als auch auf die Formen vom Typ 2 anwenden. Doch wie bereits erwähnt, bereitet der Fall $\dim(\psi) = 4$ und $\psi \notin GP_2(K)$ große Schwierigkeiten. Nur für diese Art von Formen sind die Ergebnisse in Abbildung 3 nicht vollständig. Für die Formen vom dritten Typ allerdings haben Izhboldin und Karpenko in [IK99b] eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Isotropie von $\varphi \otimes K(\psi)$ geliefert.

Um die Ergebnisse in Abbildung 3 verstehen zu können, müssen wir zunächst Halbnachbarn und Clifford-Algebren einführen. Eine Form χ über K heißt *Halbnachbar*, falls eine Form ζ über K und ein $a \in K^*$ existieren so, dass $\dim(\zeta) = \dim(\chi)$ gilt und $\chi \perp a\zeta$ ähnlich einer Pfisterform ist.

Sei φ eine quadratische Form der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ über K, und sei

$$T(K^n) \;:=\; K \oplus K^n \oplus (K^n \otimes_K K^n) \oplus (K^n \otimes_K K^n \otimes_K K^n) \oplus \dots$$

die *Tensoralgebra* von K^n. Mit $I(\varphi)$ bezeichnen wir das Ideal von $T(K^n)$, dass von allen Elementen der Form $v \otimes v - \varphi(v) \cdot 1$, $v \in K^n$, erzeugt wird. Dann heißt die Quotientenalgebra

$$C(\varphi) \;:=\; T(K^n)/I(\varphi)$$

Clifford-Algebra von φ.

Die Tensoralgebra $T(K^n)$ ist auf natürliche Weise $\mathbb{N}_0$-graduiert durch $T(K^n)_0 = K$ und

$$T(K^n)_i \;=\; \underbrace{K^n \otimes_K \cdots \otimes_K K^n}_{i-\text{mal}} \qquad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren

$$T_e(K^n) \;:=\; \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} T(K^n)_{2i} \qquad \text{und} \qquad T_u(K^n) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} T(K^n)_{2i+1}.$$

Sei $P : T(K^n) \to C(\varphi)$ die natürliche Projektion. Da alle erzeugenden Elemente von $I(\varphi)$ in $T_e(K^n)$ liegen, können wir auf $C(\varphi)$ eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung erklären, indem wir $C_0(\varphi) := P(T_e(K^n))$ und $C_1(\varphi) := P(T_u(K^n))$ setzen (siehe [Lam73, Seite 103]).

Sei $d \in d(\varphi)$. Ist n gerade, so ist $C(\varphi)$ eine Azumaya-Algebra über K. Ferner ist $C_0(\varphi)$ eine Azumaya-Algebra über $K(\sqrt{d})$, falls $d(\varphi) \neq 1$ gilt. Für den Fall $d(\varphi) = 1$ ist $C_0(\varphi)$ das Kreuzprodukt zweier isomorpher Azumaya-Algebren über K. Sei φ eine beliebige Form gerader Dimension über K. Dann definieren wir den Index von $C_0(\varphi)$ durch

$$\operatorname{ind}(C_0(\varphi)) \;=\; \begin{cases} \operatorname{ind}_L([C_0(\varphi)]) & \text{für } d(\varphi) \neq 1 \text{ und } L = K(\sqrt{d}) \\ \operatorname{ind}_K([A]) & \text{für } d(\varphi) = 1 \text{ und } C_0(\varphi) \cong A \times A \end{cases}. \tag{A.1}$$

Ist n ungerade, so ist $C_0(\varphi)$ eine Azumaya-Algebra über K. Für $d(\varphi) \neq 1$ ist $C(\varphi)$ eine Azumaya-Algebra über $K(\sqrt{d})$, und für $d(\varphi) = 1$ ist $C(\varphi)$ das Kreuzprodukt zweier isomorpher Azumaya-Algebren über K (vergleiche [Lam73, Tabelle, Seite 112]). Ist φ eine beliebige

φ		ψ			
d	Typ	dim	Voraussetzungen	$\varphi \otimes K(\psi)$	Referenz
1		≥ 2	$\psi \notin GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Thm. 4.1.10
			$\psi \in GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\forall\, \chi \subset \psi$, $\dim(\chi) = 3$, gilt $z\chi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Satz 4.1.11
$\neq 1$	1	≥ 2	φ Pfisternachbar, von $\tau \in P_3(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau$, $z \in K^*$	Thm. 2.2.11
	2	2		isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Satz 1.2.5
		3	φ ähnlich zu $\langle\langle a, b\rangle\rangle \perp x\langle 1, -d\rangle$, $d \in d(\varphi)$, $a, b, x \in K^*$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$, oder $\exists\, y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ mit $z\psi \subset \langle\langle a, b, y\rangle\rangle$, $z \in K^*$	Prop. 4.1.34
		4	$d(\varphi) = d(\psi)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\exists$ Pfisternachbar χ, $\dim(\chi) = 5$, $\chi \subset \varphi$, $\chi \otimes K(\psi)$ isotrop	Thm. 8.5, [IK98]
			$\psi \in GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\forall \chi \subset \psi$, $\dim(\chi) = 3$, ist $\varphi \otimes K(\chi)$ isotrop (siehe $\dim(\psi) = 3$)	Satz 4.1.36
			$\mathrm{ind}(C_0(\varphi) \otimes_K C_0(\psi))$ $= 1$, $d(\psi) \neq 1$ (vergleiche (A.3))	isotrop $\Leftrightarrow$ $\exists$ Pfisternachbar χ, $\dim(\chi) = 5$, $\chi \subset \varphi$, $\chi \otimes K(\psi)$ isotrop oder $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Prop. 8.7, [IK98]
			$\mathrm{ind}(C_0(\varphi) \otimes_K C_0(\psi))$ $= 4$ (vergleiche (A.3))	isotrop $\Leftrightarrow$ $\exists$ Pfisternachbar χ, $\dim(\chi) = 5$, $\chi \subset \varphi$, $\chi \otimes K(\psi)$ isotrop	Prop. 8.6, [IK98]
		$5 - 7$	φ ähnlich zu $\langle\langle a, b\rangle\rangle \perp x\langle 1, -d\rangle$, $d \in d(\varphi)$, $a, b, x \in K^*$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$, oder $\exists\, y \in D_K^*(x\langle 1, -d\rangle)$ mit $z\psi \subset \langle\langle a, b, y\rangle\rangle$, $z \in K^*$	Prop. 4.1.33, Prop. 4.1.30
		≥ 9		anisotrop	Thm. 4.1.26
	3	≥ 2	$\psi \notin GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \varphi$, $z \in K^*$	Cor. 5.6, [IK99b]
			$\psi \in GP_2(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\forall\, \chi \subset \psi$, $\dim(\chi) = 3$, gilt $z\chi \subset \varphi$, $z \in K^*$	

Abbildung 3: Formen der Dimension 6

$\dim(\varphi)$	$\dim(\psi)$	Voraussetzungen	$\varphi \otimes K(\psi)$	Referenz
7	3		isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau \Subset P_3(K)$, $z \in K^*$, und φ enhält Pfisternachbar von τ oder $z\psi \subset \zeta$, $\dim(\zeta) = 7$, mit $\varphi \perp \zeta \perp \tau \Subset I^4(K)$ für $\tau \Subset GP_3(K)$ $\cap\, W(K(\psi)/K)$	Thm. 9, [Lag96]
	≥ 3	$\mathrm{ind}(C(\varphi)) = 2$, $\varphi' := \varphi \perp \langle -d(\varphi) \rangle$ (vergleiche (A.2))	isotrop $\Leftrightarrow$ $\varphi' \otimes K(\psi)$ ist isotrop (siehe $\dim(\varphi) = 8$)	Cor. 9, [Lag96]
8	≥ 2, $\neq 4$	$\det(\varphi) = 1$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\exists$ Halbnachbar φ' von φ mit $\psi \subset \varphi'$ oder $\exists\, \chi \subset \varphi$ und $\tau \Subset W(K(\psi)/K)$ anisotrop mit $\chi \subset \tau$, $\dim(\chi) > \frac{1}{2}\dim(\tau)$	Thm. 8.1, [IK99a]
	8	$\mathrm{ind}(C_0(\varphi)) \neq 4$ (vergleiche (A.1))	isotrop $\Leftrightarrow$ φ, ψ sind Halbnachbarn	Thm. 11.1, [Izh01b]
		$\det(\varphi) = 1 = \det(\psi)$	isotrop $\Leftrightarrow$ φ, ψ sind Halbnachbarn	Prop. 3.5, [Izh98]
9	≥ 2	φ Pfisternachbar von $\tau \Subset P_4(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau$, $z \in K^*$	Thm. 2.2.11
	9	φ kein Pfisternachbar, $\mathrm{ind}_K([C_0(\varphi)]) \geq 4$	isotrop $\Leftrightarrow$ φ, ψ sind ähnlich	Thm. 1.13, [Kar01]
	≥ 9, ≤ 16	φ kein Pfisternachbar, ψ Pfisternachbar	anisotrop, kein Pfisternachbar	Lem. 6.8, [Izh01a]
	≥ 13	φ kein Pfisternachbar	anisotrop, kein Pfisternachbar	Prop. 6.13, [Izh01a]

Abbildung 4: Formen der Dimension 7 - 9

$\dim(\varphi)$	$\dim(\psi)$	Voraussetzungen	$\varphi \otimes K(\psi)$	Referenz
10	11	$\varphi \cong \sigma \perp a\langle 1, b\rangle$, $a, b \in K^*$, $\sigma \Subset GP_3(K)$, $\mathrm{ind}_K([C_0(\psi)]) \leq 2$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau \Subset P_4(K)$, $z \in K^*$, und φ enhält Pfisternachbar von τ	Cor. 2.21, [Lag01]
		$\varphi \cong \sigma_p \perp a\pi_p$, $a \in K^*$, $\sigma \Subset P_3(K)$, $\pi \Subset P_2(K)$, $i(\sigma \perp -\pi) = 2$, $\mathrm{ind}_K([C_0(\psi)]) = 2$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau \Subset P_4(K)$ mit $\varphi \otimes K(\tau)$ isotrop	Thm. 3.7, [Lag01]
	≥ 11	$\varphi \Subset I^2(K)$, $\mathrm{ind}_K([C(\varphi)]) = 2$	anisotrop	Thm. 10.6, [Izh01a]
	≥ 12	$\varphi \cong \sigma \perp a\langle 1, b\rangle$, $a, b \in K^*$, $\sigma \Subset GP_3(K)$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau \Subset P_4(K)$, $z \in K^*$, und φ enhält Pfisternachbar von τ	Cor. 2.21, [Lag01]
		$\varphi \cong \sigma_p \perp a\pi_p$, $a \in K^*$, $\sigma \Subset P_3(K)$, $\pi \Subset P_2(K)$, $i(\sigma \perp -\pi) = 2$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau \Subset P_4(K)$ mit $\varphi \otimes K(\tau)$ isotrop	Thm. 3.7, [Lag01]
12	11	$\varphi \cong a\sigma \perp b\pi$, $a, b \in K^*$, $\sigma \Subset P_3(K)$, $\pi \Subset P_2(K)$, $i(\sigma \perp -\pi) = 2$, $\mathrm{ind}_K([C_0(\psi)]) \leq 2$	isotrop $\Leftrightarrow$ $\varphi \otimes K(\psi')$ ist isotrop, $\psi' := \psi \perp \langle -d(\psi)\rangle$ (siehe $\dim(\psi) = 12$)	Thm. 2.24 [Lag01]
	12	$\varphi \cong a\sigma \perp b\pi$, $a, b \in K^*$, $\sigma \Subset P_3(K)$, $\pi \Subset P_2(K)$, $i(\sigma \perp -\pi) = 2$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau \Subset P_4(K)$, $z \in K^*$, und φ enhält Pfisternachbar von τ oder $\exists\, c \in K^*$, $x \in D_K(\pi)$ mit $\langle ab, c, x\rangle \otimes \sigma$ $\perp -c\pi \perp -\psi \Subset I^5(K)$	
	≥ 13	$\varphi \cong a\sigma \perp b\pi$, $a, b \in K^*$, $\sigma \Subset P_3(K)$, $\pi \Subset P_2(K)$ $i(\sigma \perp -\pi) = 2$	isotrop $\Leftrightarrow$ $z\psi \subset \tau \Subset P_4(K)$, $z \in K^*$, und φ enhält Pfisternachbar von τ	

Abbildung 5: Formen der Dimension 10 und 12

Form über K mit ungerader Dimension, so definieren wir den Index von $C(\varphi)$ durch

$$\operatorname{ind}(C(\varphi)) \;=\; \begin{cases} \operatorname{ind}_L([C(\varphi)]) & \text{für } d(\varphi) \neq 1 \text{ und } L = K(\sqrt{d}) \\ \operatorname{ind}_K([A]) & \text{für } d(\varphi) = 1 \text{ und } C(\varphi) \cong A \times A \end{cases}. \tag{A.2}$$

Sind nun $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ beliebige Formen über K, $r \in \mathbb{N}$, so hat die K-Algebra $C_0(\varphi_1) \otimes_K \cdots \otimes_K C_0(\varphi_r)$ die Form $A \times \cdots \times A$ mit einer einfachen K-Algebra A (siehe [IK98, Seite 68]). Da das Zentrum einer endlichdimensionalen, einfachen K-Algebra nach [Ker90, Satz 5.3, Seite 12] immer ein Körper ist, können wir

$$\operatorname{ind}(C_0(\varphi_1) \otimes_K \cdots \otimes_K C_0(\varphi_r)) \;:=\; \operatorname{ind}_{Z(A)}([A]) \tag{A.3}$$

definieren.

In der Einleitung zu Abschnitt 1.3 wurde bereits erwähnt, dass die Clifford-Invariante $c(\varphi)$ ursprünglich über die Clifford-Algebra $C(\varphi)$ definiert wurde. Tatsächlich gilt

$$c(\varphi) \;=\; \begin{cases} [C(\varphi)] \in \operatorname{Br}(K) & \text{für n gerade} \\ [C_0(\varphi)] \in \operatorname{Br}(K) & \text{für n ungerade} \end{cases}$$

(siehe [Lam73, 3.12, Seite 120]).

Die betrachteten Formen φ und ψ in Abbildung 3 sind grundsätzlich anisotrop. Während die erste Spalte der Tabelle die Diskriminante von φ beschreibt, legt die zweite Spalte den Typ von φ, wie er weiter oben definiert wurde, fest. Ansonsten liest sich Abbildung 3 wie Abbildung 2.

Die Abbildungen 4 und 5 schließlich beschäftigen sich mit aktuelleren Resultaten über die generische Zerfällung niedrigdimensionaler Formen. Hier sind noch viele Fragen offen, weshalb die angeführten Ergebnisse meist sehr spezifische Voraussetzungen benötigen. Für das Verständnis der beiden Abbildungen gilt dasselbe wie für Abbildung 3.

Literaturverzeichnis

[Ara75] Arason, Jón K.: Cohomologische Invarianten Quadratischer Formen. In: *Journal of Algebra* 448-491 (1975), S. 448–491

[Azu51] Azumaya, G.: On maximally central algebras. In: *Nagoya Math. J.* 2 (1951), S. 119–150

[Bos03] Bosch, Siegfried: *Algebra.* 5., überarbeitete Auflage. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2003

[Bou72] Bourbaki, Nicolas: *Commutative Algebra, Chapters 1-7.* Springer-Verlag New-York, Heidelberg, Berlin, 1972

[EL72] Elman, Richard ; Lam, Tsit-Yuen: Pfister Forms and K-Theory of Fields. In: *Journal of Algebra* 23 (1972), S. 181–213

[ELW77] Elman, Richard ; Lam, Tsit-Yuen ; Wadsworth, Adrian R.: Amenable fields and Pfister exzensions. In: *Proc. of Quadratic Forms Conference (ed. G. Orzech). Queen's Papers in Pure and Applied Math.* 46 (1977), S. 445–491

[ELW79] Elman, Richard ; Lam, Tsit-Yuen ; Wadsworth, Adrian R.: Pfister Ideals in Witt Rings. In: *Math. Ann.* 245 (1979), S. 219–245

[Fit81] Fitzgerald, Robert W.: Function Fields of Quadratic Forms. In: *Math. Zeitschrift* 178 (1981), S. 63–76

[Fit83] Fitzgerald, Robert W.: Witt kernels of function field extensions. In: *Pacific Journal of Math.* 109 (1983), S. 89–106

[Gro79] Gross, Herbert: *Progess in Mathematics.* Bd. 1: *Quadratic forms in infinite dimensional vector spaces*. Birkhäuser, 1979

[HG95] Hoffmann, D. W. ; Geel, J. V.: Minimal forms with respect to function fields of conics. In: *Manuscripta Math.* 86 (1995), S. 23–48

[HKR04] Hurrelbrink, Jürgen ; Karpenko, Nikita A. ; Rehmann, Ulf: The Minimal Height of Quadratic Forms of Given Dimension. In: *Preprint Server: Linear Algebraic Groups and Related Structures* 157 (2004), October. – http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/LAG/

[HLG95] Hoffmann, D. W. ; Lewis, D. W. ; Geel, J. V.: Minimal forms for function fields of conics. In: *Proc. Symp. Pure Math.* 58.2 (1995), S. 227–237

[Hof92] Hoffmann, Detlev W.: *Function Fields of Quadratic Forms*, UC Berkeley, Diss., 1992

[Hof94] Hoffmann, Detlev W.: On 6-dimensional quadratic forms isotropic over the function field of a quadric. In: *Communications in Algebra* 22 (1994), S. 1999–2014

[Hof95a] Hoffmann, Detlev W.: Isotropy of 5-Dimensionale Quadratic Forms over the Function Field of a Quadric. In: *Proc. Symp. Pure Math.* 58.2 (1995), S. 217–225

[Hof95b] Hoffmann, Detlev W.: Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric. In: *Math. Zeitschrift* 220 (1995), S. 461–476

[HR93] Hurrelbrink, Jürgen ; Rehmann, Ulf: Splitting patterns of excellent quadratic forms. In: *J. Reine Angew. Math.* 444 (1993), S. 183–192

[HR95] Hurrelbrink, Jürgen ; Rehmann, Ulf: Splitting patterns of quadratic forms. In: *Math. Nachr.* 176 (1995), S. 111–127

[IK98] Izhboldin, Oleg T. ; Karpenko, Nikita A.: Isotropie of Six-Dimensional Quadratic Forms over Function Fields of Quadrics. In: *J. Algebra* 209 (1998), S. 65–93

[IK99a] Izhboldin, Oleg T. ; Karpenko, Nikita A.: Isotropy of 8-dimensionale Quadratic Forms over Function Fields of Quadrics. In: *Comm. Algebra* 27 (1999), Nr. 4, S. 1823–1841

[IK99b] Izhboldin, Oleg T. ; Karpenko, Nikita A.: Isotropy of virtual Albert forms over function fields of quadrics. In: *Math. Nachr.* 206 (1999), S. 111–122

[Izh98] Izhboldin, Oleg T.: Motivic Equivalence of Quadratic Forms. In: *Doc. Math.* 3 (1998), S. 341–351

[Izh01a] Izhboldin, Oleg T.: Fields of u-invariant 9. In: *Ann. Math.* 154 (2001), S. 529–587

[Izh01b] Izhboldin, Oleg T.: The Groups $H^3(F(X)/F)$ and $CH^2(X)$ for Generic Splitting Varieties of Quadratic Forms. In: *K-Theory* 22 (2001), S. 199–229

[Jac64] Jacobson, Nathan: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 32: *Lectures in Abstract Algebra, III. Theory of Fields and Galois Theory*. Second corrected printing. Springer-Verlag New-York, Heidelberg, Berlin, 1964

[Kar01] Karpenko, Nikita A.: Characterization of Minimal Pfister Neighbors via Rost Projectors. In: *J. Pure Appl. Math.* 160 (2001), Nr. 2-3, S. 195–227

[Ker90] Kersten, Ina: *Aspects of mathematics*. Bd. D6: *Brauergruppen über Körpern*. Vieweg Braunschweig, Wiesbaden, 1990

[KM03] Karpenko, Nikita A. ; Merkurjev, Alexander S.: Essential dimension of quadrics. In: *Invent. Math.* 153 (2003), S. 361–372

[Kne73] KNEBUSCH, Manfred: Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem. In: *Acta Arith.* 24 (1973), S. 279–299

[Kne76] KNEBUSCH, Manfred: Generic splitting of quadratic forms I. In: *Proc. London Math. Soc.* 33 (1976), S. 65–93

[Kne77] KNEBUSCH, Manfred: Generic splitting of quadratic forms II. In: *Proc. London Math. Soc.* 34 (1977), S. 1–31

[Kne02] KNESER, Martin: *Quadratische Formen.* Springer-Verlag Berlin, 2002. – Neu bearb. und hrsg. in Zusammenarbeit mit Rudolf Scharlau.

[Koe95] KOENIGSMANN, Jochen: p-Henselian Fields. In: *Manuscripta Math.* 87 (1995), S. 89–99

[Lag96] LAGHRIBI, Ahmed: Isotropie de Certaines Formes Quadratiques de Dimensions 7 et 8 sur le Corps des Fonctions d'une Quadrique. In: *Duke Math. J.* 85 (1996), Nr. 2, S. 397–410

[Lag01] LAGHRIBI, Ahmed: Certaines Combinaisons Linéaires de Deux Formes de Pfister et le Problème d'Isotropie. In: *Doc. Math.* Extra Vol. (2001), S. 219–240

[Lam73] LAM, Tsit-Yuen: *The Algebraic Theory of Quadratic Forms.* Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, 1973

[Lor70] LORENZ, Falko: *Lecture Notes in Mathematics.* Bd. 130: *Quadratische Formen über Körpern*. Springer-Verlag Berlin, New York, 1970

[Lor97] LORENZ, Falko: *Einführung in die Algebra II.* 2. Auflage. Spektrum Akad. Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 1997

[Mer81a] MERKURJEV, Alexander S.: On the norm residue symbol of degree 2. In: *Dokladi Akad. Nauk. SSSR* 261 (1981), S. 542–547. – Englische Übersetzung: siehe [Mer81b]

[Mer81b] MERKURJEV, Alexander S.: On the norm residue symbol of degree 2. In: *Soviet Math. Doklady* 24 (1981), S. 546–551

[MH73] MILNOR, J. ; HUSEMOLLER, D.: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Bd. 73: *Symmetric bilinear forms*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1973

[Mor90] MORESI, R.: *Corps 2-henséliens et inégalité de Cauchy-Schwarz.* Bd. 42. 1990. – 295–302 S

[OVV00] ORLOV, Dmitry ; VISHIK, Alexander ; VOEVODSKY, Vladimir: An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms. In: *Preprint Server: K-Theory* 454 (2000), Dezember. – http://www.math.uiuc.edu/K-theory/

[Pfi65] PFISTER, Albrech: Multiplikative quadratische Formen. In: *Arch. Math.* 16 (1965), S. 363–370

[Pfi95] Pfister, Albrecht: *London Math. Soc. Lecture Note Series*. Bd. 217: *Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology*. Cambridge University Press, 1995

[Pie82] Pierce, Richard S.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 88: *Associative Algebras*. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1982

[Ros90] Rost, Markus: On quadratic forms isotropie over the function field of a conic. In: *Math. Ann.* 288 (1990), S. 511–513

[Sch85] Scharlau, Winfried: *Grundlehren Math. Wiss.*. Bd. 270: *Quadratic and Hermitian Forms*. Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 1985

[Spr55] Springer, Tonny A.: Quadratic forms over fields with a discrete valuation. In: *Indag. Math.* 17 (1955), S. 352–362

[Uen99] Ueno, Kenji: *Translation of Mathematical Monographs*. Bd. 185: *Algebraic Geometry 1, From Algebraic Varieties to Schemes*. American Math. Soc. Providence, 1999

[Wad75] Wadsworth, Adrian R.: Similarity of quadratic forms and isomorphism of their function fields. In: *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 208 (1975), S. 352–358

[Wad83] Wadsworth, Adrian R.: p-Henselian fields: K-theory, Galois cohomology, and graded Witt rings. In: *Pacific Journal of Math.* 105 (1983), S. 473–496

[Wit98] Witt, Ernst: *Collected Papers. Gesammelte Abhandlungen.* Springer Berlin, 1998

Symbolverzeichnis

$[A] \cdot [B]$	Produkt in der Brauergruppe, Seite 33
$[A]$	Äquivalenzklasse der Azumaya-Algebra A, Seite 33
$\mathrm{Br}(K)$	Brauergruppe von K, Seite 33
$\mathrm{codim}(\varphi)$	Kodimension des Pfisternachbarn φ, Seite 65
$\deg(\varphi)$	Grad der quadratischen Form φ, Seite 73
$\det(\varphi)$	Determinante der quadratischen Form φ, Seite 16
$\dim(\varphi)$	Dimension der quadratischen Form φ, Seite 11
$\mathbb{H}$	hyperbolische Ebene, Seite 17
$[\varphi]$	Isometrieklasse der quadratischen Form φ, Seite 20
$\mathrm{ind}_K([A])$	Index der Äquivalenzklasse der Azumaya-Algebra A, Seite 33
$\ker_r(\varphi)$	r-ter anisotroper Kern der Form φ, Seite 68
$\lambda_*(\varphi)$	Spezialisierung der Form φ bzgl. der Stelle λ, Seite 59
$\mathrm{link}(U)$	Verbindungszahl der Menge U von Pfisterformen, Seite 81
$\mathcal{G}(R)$	Quadratklassengruppe von R, Seite 15
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, Seite 10
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen inklusive der 0, Seite 10
$\mathrm{ord}(\varphi)$	Ordnung der exzellenten Form φ, Seite 97
$\mathrm{ord}(\varphi/\psi)$	Ordnung der ψ-Erweiterung φ, Seite 97
$\mathrm{ord}(\{\varphi\})$	Ordnung von $\{\varphi\}$ in $W(K)$, Seite 28
$\overline{K}$	Vervollständigung des diskret bewerteten Körpers K, Seite 43
$\partial_1(\varphi)$	erste Restklassenform von φ, Seite 42
$\partial_2(\varphi)$	zweite Restklassenform von φ, Seite 42

$\langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle$	Pfisterform, Seite 27
$\psi \subset \varphi$	ψ ist Teilform von φ, Seite 13
$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$	quadratische Form in Diagonalgestalt, Seite 13
$[a]^{\square}$	Quadratklasse von a, Seite 15
$[a]_S^{\square}$	Quadratklasse von a in der Ringerweiterung S, Seite 15
$\mathrm{Quat}(K)$	von den Quaternionenalgebren erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Br}(K)$, Seite 36
$\left(\frac{a,b}{K}\right)$	Quaternionenalgebra über K, Seite 32
${}_2\mathrm{Br}(K)$	Menge der Elemente von $\mathrm{Br}(K)$ vom Exponenten ≤ 2, Seite 36
τ_p	reiner Anteil der Pfisterform τ, Seite 64
$\mathrm{transgrad}_K(L)$	Transzendenzgrad der Körpererweiterung L von K, Seite 57
$\varphi \perp \psi$	orthogonale Summe der quadratischen Formen φ und ψ, Seite 13
$\varphi \Subset U$	die Äquivalenzklasse der Form φ ist Element von U, Seite 82
$\varphi \cong \psi$	Isometrie der quadratischen Formen φ und ψ, Seite 12
$\varphi \otimes \psi$	Produkt der quadratischen Formen φ und ψ, Seite 20
$\varphi \otimes S$	die quadratische Form φ betrachtet über der Ringerweiterung S, Seite 22
$\varphi \sim \psi$	Äquivalenz der quadratischen Formen φ und ψ, Seite 21
φ_S	die quadratische Form φ betrachtet über der Ringerweiterung S, Seite 22
φ_{an}	anisotroper Kern der quadratischen Form φ, Seite 18
$\widehat{M}$	Dualraum des Moduls M, Seite 13
$\{\varphi\} \oplus \{\psi\}$	Summe im Wittring, Seite 21
$\{\varphi\} \otimes \{\psi\}$	Produkt im Wittring, Seite 21
$\{\varphi\}$	Äquivalenzklasse der quadratischen Form φ, Seite 21
$A \sim B$	Brauer-Äquivalenz der Azumaya-Algebren A und B, Seite 33
b_φ	assoziierte Bilinearform der quadratischen Form φ, Seite 12
$c(\varphi)$	Clifford-Invariante der quadratischen Form φ, Seite 38
$d(\varphi)$	Diskriminante der quadratischen Form φ, Seite 29
$D_R(\varphi)$	Menge aller Elemente von R, die von φ dargestellt werden, Seite 16
$D_R^*(\varphi)$	Menge aller Elemente von R^*, die von φ dargestellt werden, Seite 16

$G_K(\varphi)$	Menge der Ähnlichkeitsfaktoren der Form φ, Seite 26
$GP(K)$	Menge der Klassen aller Formen φ mit $a\varphi \Subset P(K)$, $a \in K^*$, Seite 82
$GP_k(K)$	Menge der Klassen aller Formen φ mit $a\varphi \Subset P_k(K)$, $a \in K^*$, Seite 82
$h(\varphi)$	Höhe der quadratischen Form φ, Seite 68
$i(\varphi)$	Wittindex der quadratischen Form φ, Seite 18
$I(K)$	Fundamentalideal von $W(K)$, Seite 28
$I^n(K)$	n-te Potenz des Fundamentalideals von $W(K)$, Seite 30
$i_r(\varphi)$	r-ter Wittindex der Form φ, Seite 68
$J_k(K)$	Ideal der Formen vom Grad $\geq k$ in $W(K)$, Seite 74
$K(\varphi)$	Funktionenkörper der quadratischen Form φ, Seite 55
$K(\varphi)_s$	kleiner Funktionenkörper der quadratischen Form φ, Seite 55
$L \cdot_K M$	freies Kompositum der Körper L und M über K, Seite 53
$L \sim M$	Äquivalenz der Körper L und M, Seite 59
$L \sim_K M$	Äquivalenz der Körper L und M über K, Seite 59
$M_n(R)$	Menge der $(n \times n)$-Matrizen über R, Seite 10
$P(K)$	Menge der Äquivalenzklassen aller Pfisterformen über K, Seite 82
$P_k(K)$	Menge der Klassen aller k-fachen Pfisterformen in $W(K)$, Seite 82
$r \times \varphi$	r-fache Summe von φ, Seite 18
$s(\varphi)$	Hasse-Invariante der quadratischen Form φ, Seite 36
$s(K)$	Stufe des Körpers K, Seite 99
$W(L/K)$	Wittkern von L über K, Seite 59
$W(R)$	Wittring von R, Seite 22
$W_t(K)$	Menge der Torsionselemente von $W(K)$, Seite 28

Index

2-henselsch, 43
K-Stelle, 48
K-äquivalent, 59
L-minimal, 130
N-Pfister-Ideal, 82
    streng, 82
ψ-Erweiterung, 97
    r-tes Komplement, 97
    Ordnung, 97
k-Pfister-Ideal, 82
l-Verbindung, 81
l-verbunden, 81
r-ter Wittindex, 68
r-ter anisotroper Kern, 68
r-tes Komplement, 97
Ähnlichkeitsfaktor, 26
ähnlich, 26
äquivalent (Körper), 59
    K-, 59
äquivalent (quadr. Formen), 21

Abbildung
    quadratisch, 10
Albert-Form, 114
Algebra
    Azumaya-, 32
    Clifford-, 135
    einfach, 32
    oppositionell, 32
    Quaternionen-, 32
    Tensor-, 135
    zentral, 31
    Zentrum, 31
algebraische Menge, 54
anisotrop, 17
anisotroper Kern, 18
    r-ter, 68
Anisotropiekriterium, 93
Anteil
    rein, 30, 64
Arason-Pfister-Hauptsatz, 67
assoziierte Bilinearform, 10
assoziierte Matrix (einer quadr. Form), 11
assoziierte Matrix (eines quadr. Raums), 12
Azumaya-Algebra, 32
    Index, 33
    Zerfällungskörper, 33

Basis
    geordnet, 12
    Orthogonal-, 12
    Standard-, 34
Bewertung
    diskret, 41
Bewertungsring (einer diskr. Bew.), 42
Bewertungsring (einer Stelle), 49
Bewertungsring (eines Körpers), 49
Bilinearform
    assoziiert, 10
Brauergruppe, 33

Cauchyfolge, 42
Clifford-Algebra, 135
Clifford-Invariante, 38

darstellen, 16
definiert über, 94
definiert durch, 94
Determinante, 16
Diagonalgestalt, 13
Diagonalisierung, 13

dichte Teilmenge, 43
Dimensionsindex, 28
diskret bewerteter Körper, 41
  Vervollständigung, 43
  vollständig, 43
diskrete Bewertung, 41
  Bewertungsring, 42
  Primelement, 42
  Restklassenkörper, 42
Diskriminante, 29

Ebene
  hyperbolisch, 17
einfach, 32
Element
  endlich, 48
  Prim-, 42
  Torsions-, 28
Elemente
  orthogonal, 12
endliches Element, 48
erste Restklassenform, 42
exzellent (Körpererw.), 130
exzellent (quadr. Form), 97

Folge
  Cauchy-, 42
  konvergent, 43
  Null-, 43
freies Kompositum, 53
Fundamentalideal, 29
Funktionenkörper, 55
  klein, 55

generische Nullstelle, 55
generischer Nullstellenkörper, 62
generischer Wert, 26
generischer Zerfällungskörper, 68
generischer Zerfällungsturm, 68
geordnete Basis, 12
Grad, 73
Gruppe
  Brauer-, 33
  Quadratklassen-, 15
gute Reduktion, 58

Höhe, 68
Halbnachbar, 135
Hasse-Invariante, 36
hyperbolisch, 18
hyperbolische Ebene, 17

Ideal
  N-Pfister-, 82
  k-Pfister-, 82
  Fundamental-, 29
  strenges N-Pfister-, 82
Index, 33
  Dimensions-, 28
  Witt-, 18
Invariante
  Clifford-, 38
  Hasse-, 36
Involution
  natürlich, 34
Isometrie (von quadr. Formen), 12
Isometrie (von quadr. Räumen), 12
isometrisch (quadr. Formen), 12
isometrisch (quadr. Räume), 12
isotrop, 17

Körper
  2-henselsch, 43
  K-äquivalent, 59
  äquivalent, 59
  Bewertungsring, 49
  diskret bewertet, 41
  freies Kompositum, 53
  Funktionen-, 55
  generischer Nullstellen-, 62
  generischer Zerfällungs-, 68
  kleiner Funktionen-, 55
  Leit-, 68
  Restklassen-, 42
  Stufe, 99
  Wittring, 22
  Zerfällungs-, 33
Körpererweiterung
  exzellent, 130
  regulär, 53
  unirational, 90

Kürzungssatz, 16
Kern
    r-ter anisotroper, 68
    anisotrop, 18
    Witt-, 59, 85
kleiner Funktionenkörper, 55
Knebusch-Vermutung, 77
Kodimension, 65
Komplement, 65
    r-tes, 97
    orthogonal, 12
komplementäre Zahl, 100
Kompositum
    frei, 53
konvergieren, 43

Leitform, 72
Leitkörper, 68

Matrix
    assoziiert (einer quadr. Form), 11
    assoziiert (eines quadr. Raums), 12
maximale Zerfällung, 102
Menge
    algebraisch, 54
    dichte Teil-, 43
Morphismus, 48
multiplikativ, 26
    streng, 26

natürliche Involution, 34
Norm, 34
Normform, 34
Nullfolge, 43
Nullstelle
    generisch, 55
Nullstellenkörper
    generisch, 62

oppositionelle Algebra, 32
Ordnung, 28
Ordnung (einer ψ-Erweiterung), 97
orthogonal, 12
Orthogonalbasis, 12
orthogonale Summe (quadr. Formen), 13
orthogonale Summe (quadr. Räume), 12
orthogonale Zerlegung (einer quadr. Form), 13
orthogonale Zerlegung (eines quadr. Raums), 12
orthogonales Komplement, 12

Pfister-Ideal
    N-, 82
    k-, 82
    strenges N-, 82
Pfisterform, 27
    l-Verbindung, 81
    l-verbunden, 81
    reiner Anteil, 30, 64
    verbunden, 81
Pfisternachbar, 65
    Kodimension, 65
    Komplement, 65
Primelement, 42
Produkt, 20

quadratische Abbildung, 10
    assoziierte Bilinearform, 10
quadratische Form, 11
    L-minimal, 130
    ψ-Erweiterung, 97
    r-ter Wittindex, 68
    r-ter anisotroper Kern, 68
    Ähnlichkeitsfaktor, 26
    ähnlich, 26
    äquivalent, 21
    Albert-Form, 114
    anisotrop, 17
    anisotroper Kern, 18
    assoziierte Matrix, 11
    Clifford-Algebra, 135
    Clifford-Invariante, 38
    darstellen, 16
    definiert über, 94
    definiert durch, 94
    Determinante, 16
    Diagonalgestalt, 13
    Diagonalisierung, 13
    Diskriminante, 29
    erste Restklassenform, 42
    exzellent, 97

Funktionenkörper, 55
generische Nullstelle, 55
generischer Nullstellenkörper, 62
generischer Wert, 26
generischer Zerfällungskörper, 68
generischer Zerfällungsturm, 68
Grad, 73
gute Reduktion, 58
Höhe, 68
Halbnachbar, 135
Hasse-Invariante, 36
hyperbolisch, 18
Isometrie, 12
isometrisch, 12
isotrop, 17
kleiner Funktionenkörper, 55
Leitform, 72
Leitkörper, 68
maximale Zerfällung, 102
multiplikativ, 26
Ordnung, 28
orthogonale Summe, 13
orthogonale Zerlegung, 13
Produkt, 20
Radikal, 23
regulär, 14
schlechte Reduktion, 58
Spezialisierung, 59
streng multiplikativ, 26
Teilform, 13
universell, 17
Witt-Zerlegung, 18
Wittindex, 18
zerfallen, 63
zweite Restklassenform, 42
quadratischer Raum, 10
assoziierte Matrix, 12
Isometrie, 12
isometrisch, 12
orthogonale Summe, 12
orthogonale Zerlegung, 12
regulär, 13
Quadratklassengruppe, 15
Quaternionenalgebra, 32
natürliche Involution, 34
Normform, 34
Standardbasis, 34

Radikal, 23
Raum
quadratisch, 10
Reduktion
gut, 58
schlecht, 58
regulär (Körpererw.), 53
regulär (quadr. Form), 14
regulär (quadr. Raum), 13
reguläre Körpererweiterung, 53
reiner Anteil, 30, 64
Restklassenform
erste, 42
zweite, 42
Restklassenkörper, 42
Ring
Bewertungs- (einer diskr. Bew.), 42
Bewertungs- (einer Stelle), 49
Bewertungs- (eines Körpers), 49
Witt-, 22

Satz
Arason-Pfister-Haupt-, 67
Merkurjev, 40
Springer, 43
Wedderburn, 32
Witts Kürzungs-, 16
Satz von Merkurjev, 40
Satz von Springer, 43
schlechte Reduktion, 58
Spezialisierung, 59
Standardbasis, 34
Stelle, 48
K-, 48
Bewertungsring, 49
streng multiplikativ, 26
Struktursatz von Wedderburn, 32
Stufe (eines Körpers), 99
Substitutionsprinzip, 25
Summe
orthogonal (quadr Räume), 12
orthogonal (quadr. Formen), 13

Teilform, 13
Teilform-Theorem, 25
Teilmenge
    dicht, 43
    Zentralisator, 31
Tensoralgebra, 135
Theorem
    Teilform-, 25
Torsionselement, 28

unirational, 90
universell, 17

Varietät, 54
Verbindungszahl, 81
verbunden, 81
Vermutung
    Knebusch-, 77
Vervollständigung, 43
vollständig, 43

Wert
    generisch, 26
Witt-Zerlegung, 18
Wittindex, 18
    r-ter, 68
Wittkern, 59, 85
Wittring, 22
Witts Kürzungssatz, 16

Zahl
    komplementär, 100
    Verbindungs-, 81
zentral, 31
Zentralisator, 31
Zentrum, 31
Zerfällung
    maximal, 102
Zerfällungskörper, 33
    generisch, 68
Zerfällungsturm
    generisch, 68
zerfallen, 63
Zerlegung
    orthogonal (einer quadr. Form), 13
    orthogonal (eines quadr. Raums), 12
    Witt-, 18
zweite Restklassenform, 42